חדו"א 2 להנדסה 201.1.9721

אביב 2022 (מרצים: ג. גולן, ד. גולקו, מ. לוין, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 9.

בשאלות 1.iii, 2.ב.i, 2.ב.ii. לאחר מעבר לאינטגרל רגיל (במשתנה אחד) צריכים לבדוק את התכנסות של אינטגרל לא אמיתי.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים i. $\int\limits_{\{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\}} (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$ ii. $\int\limits_{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)} |y|ds$ iii*. $\int\limits_{y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}} \frac{ds}{y^2}$
iv. $\int\limits_{[p,q]} \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, $[p,q]$ הינו קטע ישר מ $p=(0,0)$ ל $q=(1,2)$ v. $\int\limits_{\substack{\vec{r}(t)=cos(2t)\hat{x}+sin(2t)\hat{y}+t\hat{z}\\ t\in[0,2\pi]}} (x^2+y^2+z^2)ds$.

2. א. חשבו את האורך של עקומות הבאות:
i. $\vec{r}(t)=(2a\cdot cos(t)-a\cdot cos(2t))\hat{x}+(2a\cdot sin(t)-a\cdot sin(2t))\hat{y}$, $t\in[0,2\pi]$
ii. $\vec{r}(t)=\sqrt{t}sin(t)\hat{x}+\sqrt{t}\cdot cos(t)\hat{y}+t\hat{z}$, $t\in[1,4]$.
ב. עבור אילו ערכים של $s>0$ לעקום יש עורך סופי?
i*. $\{r(\theta)=\frac{1}{1+\theta^s},\ 0\leq\theta<\infty\}$ ii*. $\{x=e^{-t}cos(t),\ y=e^{-t}sin(t),\ z=t^{-s},\ 1<t<\infty\}$.
ג. חשבו את המסת השרשרת $\vec{r}(t)=a\cdot sin(t)\hat{x}+a\cdot cos(t)\hat{y}+bt\hat{z}$, $t\in[0,2\pi]$, אם צפיפות בכל נקודה שווה לריבוע המרחק מהנקודה לראשית.

3. במקרים הבאים חשבו את העבודה של שדה $\vec{F}$ לאורך המסילה γ, מנקודה p לנקודה q:
i. $\vec{F}=\left(e^x sin(y)-my, e^x cos(y)-m\right)$, $\gamma=\{x^2+y^2=2x,\ y\geq 0\}$, $p=(0,0)$, $q=(2,0)$.
ii. $\vec{F}=\left(e^x sin(y)-y+1, e^x cos(y)-1\right)$, $\gamma=\{x^2+y^2=2x,\ y\geq 0\}$, $p=(0,0)$, $q=(2,0)$.
iii. $\vec{F}=\left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$, $\gamma=\{(x-3)^2+(y-2)^2=1,\ y\geq 2\}$, $p=(4,2)$, $q=(2,2)$.
iv. $\vec{F}=\left(\frac{2x(2-e^y)}{(1+x^2)^2},\frac{e^y}{1+x^2}+3y\right)$, $\gamma=\{x^2+y^2=1,\ y\geq 0\}$, $p=(1,0)$, $q=(-1,0)$.
v. $\vec{F}=(|x|,|y|)$, $\gamma=\{x^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{5}{6}}=1,\ x,y\geq 0\}$, $p=(1,0)$, $q=(0,1)$.
vi. $\vec{F}=(y,z,x)$, $\gamma=(a\cdot cos(t),a\cdot sin(t),bt)$, $t=0 \rightsquigarrow t=2\pi$.

4. במקרים הבאים ברירת מחדל: כיוון המסילה הוא נגד כיוון השעון
א. i. $\oint\limits_{\{x^2+y^2=36\}} \left[(e^{x^2}-x^2y)dx+(xy^2-e^y)dy\right]$ ii. $\int\limits_C \left[z^2dx+3y^2dy-x^2dz\right]$, כאשר C הנו החלק הקצר של עקום $\{x^2+z^2=1, y=\sqrt{\pi}\}$ המתחיל ב $p=(1,\sqrt{\pi},0)$ ומסתיים ב $q=(0,\sqrt{\pi},1)$.
ב. חשבו את העבודה של שדה $\vec{F}=\left(\frac{1}{x}arctan\frac{y}{x},\frac{2}{y}arctan\frac{x}{y}\right)$ לאורך המסילה (הסגורה ופשוטה) המורכבת מקשתות $\{x^2+y^2=4,\ y>0\}$, $\{x^2+y^2=1,\ y>0\}$, $\{y=x,\ y>0\}$, $\{y=3x,\ y>0\}$.
ג. (רמז: במקרים הבאים השתמשו במשפט גרין כדי להחליף את המסילה המקורית במסילה נוחה יותר.)
i. $\oint\limits_{\{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1\}} \left(\frac{xdy}{x^2+y^2}-\frac{ydx}{x^2+y^2}\right)$ ii. $\oint\limits_{\{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\}} \frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ iii. $\int\limits_{\substack{y=tan(x)\\ \frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{3}}} \left(\frac{y}{x^2}dx-\frac{dy}{x}\right)$.

5. השתמשו בנוסחת גרין כדי לחשב את השטח החסום ע"י העקום: i. $\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$ ii. $\{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\}$
iii. $\left\{\begin{array}{l} x=a\cdot sin^3(t),\ y=b\cdot cos^3(t),\\ 0\leq t\leq 2\pi,\quad a,b>0\end{array}\right\}$ iv. $\left\{\vec{r}(t)=(t^2-1)\hat{x}+t(t^2-1)\hat{y},\quad t\in[-1,1]\right\}$.

6. מצאו עקומה סגורה ופשוטה γ עבורה האינטגרל $\oint\limits_{\gamma}\left[(\frac{x^2y}{4}+\frac{y^3}{3})dx+xdy\right]$ מקבל את הערך הגדול ביותר.

7. במקרים הבאים בדקו האם שדה $\vec{F}$ משמר בתחום $\mathcal{U}$, ואם כן, מצאו את הפוטנציאל.
i. $\vec{F}=e^y(\hat{x}+x\hat{y})$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2$ ii. $\vec{F}=\frac{y\hat{x}+x\hat{y}}{1+x^2y^2}$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2$ iii. $\vec{F}=\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{x^2+y^2}$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
iv. $\vec{F}=\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{x^2+y^2}$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\ x\geq 0\}$ v. $\vec{F}=\frac{-x\hat{x}+y\hat{y}}{(x^2+y^2)^2}$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\ x\geq 0\}$.

8. האם קיימת מסילה γ סגורה (מכוונת) שלא עוברת דרך הראשית, עבורה האינטגרל $\oint\limits_{\gamma}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ שווה ל:
i. 0 ii. $\pm\pi$ iii. $\pm 2\pi$ iv. $\pm 6\pi$.