

מבוא לאלגברה קומוטטיבית, בוחן אמצע. אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.7071 מרצה: ד. קרנר תאריך: 05.01.2023 משך המבחן: שעתיים ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני	כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".
---	--

יש לנמק היטב את כל התשובות.

1. (17 נקודות) הוכיחו: אם R תחום שלמות, אז $R[[x]]$ גם תחום שלמות.

2. (17 נקודות) יהי R תחום שלמות. בטאו את $rank(M \otimes N)$ דרך $rank(M), rank(N)$.

3. (17 נקודות) יהי (R, \mathfrak{m}) חוג מקומי. ניקח הומומורפיזמים $\phi, \epsilon : M \rightarrow N$ של מודולים נוצרים סופית. נניח ש ϕ הינו על, ו $\epsilon(M) \subseteq \mathfrak{m} \cdot N$. הוכיחו: הומומורפיזם $\phi + \epsilon$ הינו על.

4. (17 נקודות) נקבע תת-מודולים $M_1, M_2 \subseteq N$. נניח שמודולים $M_1 + M_2, M_1 \cap M_2$ נוצרים סופית. הוכיחו: M_1, M_2 גם נוצרים סופית.

5. (17 נקודות) יהי $R = R_1 \times R_2$. הציגו את ההיטל $R \rightarrow R_1$ כמעבר לחוג שברים, $R \rightarrow S^{-1}R$. מה הפירוש הגאומטרי?

6. (17 נקודות) ניקח אידאלים קו-מקסימליים, $I + J = R$. הוכיחו: $I \cap J = I \cdot J$ וגם $R/I \cdot J \cong R/I \times R/J$.