

מבוא לאלגברה קומוטטיבית, מועד א'

אוניברסיטת בן גוריון

<p>כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.7071 מרצה: ד. קרנר תאריך: 08.02.2023 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 112 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני</p>
---	--

יש לנמק היטב את כל התשובות.

1. (16 נקודות) יהי R חוג ללא נילפוטנטים. הוכיחו/הפריכו: לכל איבר $f \in R$, $f \neq 0$ קיים אידיאל ראשוני $\mathfrak{p} \subset R$ כך ש $f \notin \mathfrak{p}$.
2. (16 נקודות) יהי R תחום שלמות. הוכיחו: $R[x]$ גם תחום שלמות.
3. (16 נקודות) תהי $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ סדרה מדויקת של מודולים. הוכיחו: אם L, N נותריים אז גם M נותרי.
4. (16 נקודות) יהי R תחום שלמות ו $M \in \text{mod-}R$. נגדיר הומומורפיזם $\phi : M \rightarrow \text{Frac}(R) \otimes_R M$ ע"י $v \rightarrow \frac{v}{1}$. הוכיחו: $\ker(\phi) = \text{Torsion}(M)$.
5. (16 נקודות) מצאו את Smith normal form עבור מטריצה $A := \begin{bmatrix} x & x^3 & x-1 \\ x^2 & x^2 & \frac{1}{x} \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{k}[x, \frac{1}{x}])$. מצאו את rank של $\text{coker}[A^t]$ (מטריצה משוחלפת).
6. (16 נקודות) יהי R חוג ללא נילפוטנטים. תהי $A \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ ונניח כי $\det(A) = 0$. הוכיחו: $\ker(A) \neq 0$.

7. (16 נקודות) נניח $\bar{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$ נגדיר אידיאל $I = \langle (xy - 1)^3, (x^2 + y^2 - 2)^4 \rangle \subset \mathbb{k}[x, y]$.
 - א. מצאו את הגורמים האי-פריקים של $V(I) \subset \mathbb{k}^2$.
 - ב. האם איבר $f(x, y) = (x + y)(x + y - 1)$ שייך ל \sqrt{I} ?

בהצלחה!