

פונקציות מרוכבות להנדסת השמל - 201.1.0071

מרצים: מ.פורת, ד.קרנר, י.שטראוס.
מתרגלים: ג.בן איון, י.נוריאליאן, ע.שגב.

מועד א'

תאריך: 18.07.2023

משך הבחינה: 3 שעות.

כל שימוש בחומר עזר אסור, לרבות מחשבוניש ושעוניש חכמים.

הוראות:

- במבחן זה 7 שאלות. יש לענות על כל השאלות. הניקוד של כל שאלה מצויין ליד מספר השאלה.
- מספר הנקודות הכולל בבוחן הוא 105, כאשר הציון המקסימלי הוא 100.
- בעמוד הבא מופיעה רשימת השאלות, ולאחר מכן כל שאלה תופיע בעמוד נפרד בו תכתבו את התשובות.
- יש לענות בפירוט על כל השאלות במקום המוקצה לתשובה. ניתן לכתוב גם מצידו השני של הדף.
- לנוחותכם/ן מצורפים שני עמודים ריקים בסוף טופס המבחן למקרה שהמקום המוקצה אינו מספיק. במקרה זה יש לציין בצורה מפורשת שיש המשך פתרון בסוף הבחינה.
- בכל שאלה עליכם/ן לנמק היטב ולפרט את כל שלבי הפתרון. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטייטה לכל הנסיונות ההתחלתיים.
- הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך).
- שימו לב: דפי הטיוטא ישלחו למגרסה מיד אחרי הבחינה, ולא יבדקו.
- אסור לתלוש דפים מטופס הבחינה.
- אסור לכתוב בצבע אדום.
- בזמן הבחינה אנו עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה? / באיזה משפט צריכים להשתמש כאן? / אני שכחתי את הניסוח של..".

בהצלחה!

1. (15 נק') תהי $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ ענף אנליטי של $\log(z)$, המקיימת $f(2i) = \ln(2) + \frac{9\pi i}{2}$. תארו (במדויק) את התמונה של f .

2. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_1(0))$ ונניח כי לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $2f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{4^n}\right)$. הראו כי f קבועה.

3. (15 נק') תהי

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{iz} - 1}$$

מצאו את כל הנקודות סינגולריות המבודדות שלה ב- $\overline{\mathbb{C}}$ ולכל נקודת סינגולריות מבודדת מסוג קוטב חשבו את השארית.

4. (15 נק') יהי $a \in \mathbb{C}$ המקיים $Re(a) > 1$. כמה פתרונות יש למשוואה

$$ze^{a+z} = \frac{z^3 + 1}{4}$$

בכדור $Ball_1(0)$?

5. (15 נק') תהיינה $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ המקיימות $|f(z)| \geq |g(z)|$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכיחו כי קיים $c \in \mathbb{C}$ עבורו $f(z) = c \cdot g(z)$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

6. (15 נק') חשבו את האינטגרל הממשי הבא

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3 + x} dx$$

7. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{2, 3\})$ פונקציה עם קטבים פשוטים בנקודה $z = 2$ ובנקודה $z = 3$. נניח כי

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$$

וגם כי $f(1) = 2, f(0) = 0$. מצאו את $f(z)$.

1. (נק' 15) תהי $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ ענף אנליטי של $\log(z)$, המקיימת $f(2i) = \ln(2) + \frac{9\pi i}{2}$.
תארו (במדויק) את התמונה של f .

פתרון:

2. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_1(0))$ ונניח כי לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $2f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{4^n}\right)$.
הראו כי f קבועה.

פתרון:

3. (15 נק') תהי

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{iz} - 1}$$

מצאו את כל הנקודות סינגולריות המבודדות שלה ב- $\overline{\mathbb{C}}$ ולכל נקודת סינגולריות מבודדת מסוג קוטב חשבו את השארית.

פתרון:

4. (15 נק') יהי $a \in \mathbb{C}$ המקיים $\operatorname{Re}(a) > 1$. כמה פתרונות יש למשוואה

$$ze^{a+z} = \frac{z^3 + 1}{4}$$

בכדור $Ball_1(0)$?

פתרון:

5. (15 נק') תהיינה $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ המקיימות $|f(z)| \geq |g(z)|$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
הוכיחו כי קיים $c \in \mathbb{C}$ עבורו $f(z) = c \cdot g(z)$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

פתרון:

6. (15 נק') חשבו את האינטגרל הממשי הבא

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3 + x} dx$$

7. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{2, 3\})$ פונקציה עם קטבים פשוטים בנקודה $z = 2$ ובנקודה $z = 3$. נניח כי

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1,$$

וגם כי $f(0) = 0, f(1) = 2$. מצאו את $f(z)$.

דף זה ריק במכוון ומיועד לשימוש הסטודנט/ית.

דף זה ריק במכוון ומיועד לשימוש הסטודנט/ית.