אוניברסיטת בן-גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר ב' תשפ"ג

פונקציות מרוכבות להנדסת חשמל - 201.1.0071

מרצים: מ.פורת, ד.קרנר, י.שטראוס.

מתרגלים: ג.בן איון, י.נוריאליאן, ע.שגב.

מועד ב'

תאריך: 09.08.2023

משך הבחינה: 3 שעות.

כל שימוש בחומר עזר אסור, לרבות מחשבונים ושעונים חכמים.

הוראות:

- במבחן זה 7 שאלות. **יש לענות על כל השאלות.** הניקוד של כל שאלה מצויין ליד מספר השאלה.
- מספר הנקודות הכולל בבוחן הוא 105, כאשר הציון המקסימלי הוא 100.
- **יש לענות בפירוט על כל השאלות במקום המוקצה לתשובה. ניתן לכתוב גם מצידו השני של הדף.**
- לנוחותכם/ן מצורפים שני עמודים ריקים בסוף טופס המבחן למקרה שהמקום המוקצה אינו מספיק. במקרה זה יש לציין בצורה מפורשת שיש המשך פתרון בסוף הבחינה.
- בכל שאלה עליכם/ן לנמק היטב ולפרט את כל שלבי הפתרון. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים.
- הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך).
- **שימו לב: דפי הטיוטא ישלחו למגרסה מיד אחרי הבחינה, ולא יבדקו.**
- אסור לתלוש דפים מטופס הבחינה.
- אסור לכתוב בצבע אדום.
- בזמן הבחינה אנו עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה? / באיזה משפט צריכים להשתמש כאן? / אני שכחתי את הניסוח של..".

בהצלחה!

1. (15 נק') נניח כי הטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ מתכנס בנקודה $z = 1 + 2i$.
הראו כי הטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\frac{z}{2})^n$ מתכנס בנקודה $z = \pi$.

---

2. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. נניח כי לכל $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ קיים $m \in \mathbb{Z}$ וקיים $R > 0$ עבורם

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = 2\pi m \quad .$$

הוכיחו כי f היא פולינום.

---

3. (15 נק') פתחו את הפונקציה

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}$$

לטור לורן סביב הנקודה $z_0 = 1$ בכל אחד מהתחומים הבאים

$$\{z : |z-1| > 3\} \quad , \quad \{z : 1 < |z-1| < 3\} \quad , \quad \{z : |z-1| < 1\}.$$

---

4. (15 נק') לכל $0 < n \in \mathbb{N}$, חשבו את האינטגרל הממשי הבא

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x) dx \quad .$$

---

5. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_1(0))$ המקיימת $|f(z)| \leq |f(z^2)|$ לכל $z \in Ball_1(0)$.
הוכיחו כי f קבועה.

---

6. (15 נק') הראו כי למשוואה $e^{-z} + z - 3 = 0$ יש בדיוק פתרון אחד בתחום $\{z = x + iy : x > 0\}$.
(רמז: הסתכלו על המלבן $D_R = [0, R] \times [-R, R]$ עבור R מספיק גדול)

---

7. (15 נק') תהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, ותהי $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה. נניח כי $f^3 \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$.
הוכיחו כי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$.

1. (15 נק') נניח כי הטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ מתכנס בנקודה $z = 1 + 2i$.
הראו כי הטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\frac{z}{2})^n$ מתכנס בנקודה $z = \pi$.

<u>פתרון:</u>

2. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. נניח כי לכל $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ קיים $m \in \mathbb{Z}$ וקיים $R > 0$ עבורם

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = 2\pi m \,.$$

הוכיחו כי f היא פולינום.

<u>פתרון:</u>

3. (15 נק') פתחו את הפונקציה

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}$$

לטור לורן סביב הנקודה $z_0 = 1$ בכל אחד מהתחומים הבאים

$\{z : |z-1| > 3\}$, $\{z : 1 < |z-1| < 3\}$, $\{z : |z-1| < 1\}$.

<u>פתרון:</u>

4. (15 נק') לכל $0 < n \in \mathbb{N}$, חשבו את האינטגרל הממשי הבא

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x)dx .$$

פתרון:

5. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_1(0))$ המקיימת $|f(z)| \leq |f(z^2)|$ לכל $z \in Ball_1(0)$.
הוכיחו כי f קבועה.

פתרון:

6. (15 נק') הראו כי למשוואה $e^{-z} + z - 3 = 0$ יש בדיוק פתרון אחד בתחום $\{z = x + iy : x > 0\}$.
(רמז: הסתכלו על המלבן $D_R = [0, R] \times [-R, R]$ עבור R מספיק גדול)

פתרון:

7. (15 נק') תהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, ותהי $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה. נניח כי $f^3 \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$.
הוכיחו כי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$.

פתרון:

דף זה ריק במכוון ומיועד לשימוש הסטודנט/ית.

דף זה ריק במכוון ומיועד לשימוש הסטודנט/ית.