אוניברסיטת בן-גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר ב' תשפ"ג

פונקציות מרוכבות להנדסת חשמל - 201.1.0071

מרצים: מ.פורת, ד.קרנר, י.שטראוס.

מתרגלים: ג.בן איון, י.נוריאליאן, ע.שגב.

מועד ג'

תאריך: 10.09.2023

משך הבחינה: 3 שעות.

כל שימוש בחומר עזר אסור, לרבות מחשבונים ושעונים חכמים.

הוראות:

- במבחן זה 7 שאלות. **יש לענות על כל השאלות.** הניקוד של כל שאלה מצויין ליד מספר השאלה.
- מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 105, כאשר הציון המקסימלי הוא 100.
- **יש לענות בפירוט על כל השאלות במקום המוקצה לתשובה. ניתן לכתוב גם מצידו השני של הדף.**
- לנוחותכם/ן מצורפים שני עמודים ריקים בסוף טופס המבחן למקרה שהמקום המוקצה אינו מספיק. במקרה זה יש לציין בצורה מפורשת שיש המשך פתרון בסוף הבחינה.
- בכל שאלה עליכם/ן לנמק היטב ולפרט את כל שלבי הפתרון. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים.
- הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך).
- **שימו לב: דפי הטיוטא ישלחו למגרסה מיד אחרי הבחינה, ולא יבדקו.**
- אסור לתלוש דפים מטופס הבחינה.
- אסור לכתוב בצבע אדום.
- בזמן הבחינה אנו עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה? / באיזה משפט צריכים להשתמש כאן? / אני שכחתי את הניסוח של..".

בהצלחה!

1. (15 נק') תהי $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ ענף אנליטי של $\sqrt[17]{z}$, המקיימת $f(1) = e^{\frac{6\pi i}{17}}$.
תארו (במדויק) את התמונה של f.

---

2. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_3(1+i))$ המקיימת

$$, Re(f(z)) = x^3 - 3xy^2 + y^2 + 2 - x^2$$

לכל $z = x + iy \in Ball_3(1+i)$, ובנוסף $f(0) = 2$. מצאו את $f(z)$.

---

3. (15 נק') חשבו את האינטגרל

$$\int_{|z|=100} \frac{z^2 - 2}{z^5 + z + 1} dz \ .$$

---

4. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. הוכיחו כי לפונקציה $e^{f(z)}$ אין קוטב באינסוף.

---

5. (15 נק') תהי $f(z) = sin(z)$ ונגדיר את המסילה $\gamma = f(\partial Ball_1(0))$ נגד כיוון השעון.
כמה פעמים המסילה γ מקיפה את הנקודה $z = 0$?

---

6. (15 נק') יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ עבורו $\alpha > 0$. חשבו את האינטגרל הממשי הבא

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx \ .$$

---

7. (15 נק') תהי f פונקציה מרומורפית ב-$\mathbb{C}$. נניח שקיים $M > 0$ עבורו $|Re(f(z))| < M$, לכל z בתחום ההגדרה של f. הראו כי f קבועה.

1. (15 נק') תהי $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ ענף אנליטי של $\sqrt[17]{z}$, המקיימת $f(1) = e^{\frac{6\pi i}{17}}$.
תארו (במדויק) את התמונה של f.

פתרון:

2. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_3(1+i))$ המקיימת

$$, Re(f(z)) = x^3 - 3xy^2 + y^2 + 2 - x^2$$

לכל $z = x + iy \in Ball_3(1+i)$, ובנוסף $f(0) = 2$. מצאו את $f(z)$.

פתרון:

3. (15 נק') חשבו את האינטגרל

$$\int_{|z|=100} \frac{z^2-2}{z^5+z+1}dz \cdot$$

פתרון:

4. (15 נק') תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. הוכיחו כי לפונקציה $e^{f(z)}$ אין קוטב באינסוף.

פתרון:

5. (15 נק') תהי $f(z) = sin(z)$ ונגדיר את המסילה $\gamma = f(\partial Ball_1(0))$ נגד כיוון השעון.
כמה פעמים המסילה γ מקיפה את הנקודה $z = 0$?

פתרון:

6. (15 נק') יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ עבורו $\alpha > 0$. חשבו את האינטגרל הממשי הבא

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+1} dx \cdot$$

פתרון:

7. (15 נק') תהי f פונקציה מרומורפית ב-$\mathbb{C}$. נניח שקיים $M > 0$ עבורו $|Re(f(z))| < M$, לכל z בתחום ההגדרה של f. הראו כי f קבועה.

פתרון:

דף זה ריק במכוון ומיועד לשימוש הסטודנט/ית.

דף זה ריק במכוון ומיועד לשימוש הסטודנט/ית.