



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2023 (מרצים: מ. פורת, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 0.

(חזרה על החומר הנלמד בקורסים הקודמים. חשוב לפתור את השאלות לפני הרצאה הראשונה)

1. א. חשבו i^n עבור כל $n \in \mathbb{Z}$.

ב. יהי $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. בטאו בעזרת x, y את הביטויים הבאים: i. $Re(\frac{1}{z})$, ii. $Im(\frac{1}{z^2})$.

ג. הוכיחו: i. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, ii. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

iii. $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$. (מתי מתקיים השוויון?)

ד. רשמו את נוסחאות המעבר בין הצגה קוטבית, $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$, לבין הצגה קרטזית, $z = x + iy$.
ה. יהי $n \in \mathbb{N}$. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^n = 1$.

ו. הוכיחו: אם $|z| < 1$, $|w| < 1$ אז $|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}| < 1$. (לתרגיל "חישובי" זה תהיה חשיבות רבה בהמשך)

ז. הוכיחו/הפריכו: עבור כל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים: $(z^4 + 4) = (z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 + i)(z + 1 - i)$.

2. א. הוכיחו כי $z_{\pm} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$ הינם פתרונות של המשוואה $z^2 + a_1 z + a_0 = 0$. כאן $a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

ב. פתרו את המשוואות: i. $z^4 = 2 - i\sqrt{12}$, ii. $|z| + z = 1 - i$.

ג. ניקח פולינום $p(z) \in \mathbb{C}[z]$. הוכיחו/הפריכו: אם $p(z_0) = 0$ אז גם $p(\bar{z}_0) = 0$.

3. א. הגדירו את המושגים הבאים עבור קבוצות ב \mathbb{R}^2 : i. קבוצה פתוחה, סגורה, קומפקטית, קשירה מסילתית, פשוטת קשר.
ii. נקודת פנים, נקודת שפה, סגור של קבוצה, אורינטציה חיובית של שפת התחום.

ב. בדקו את כל התכונות/המושגים של סעיף א' עבור קבוצות ב $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ המוגדרות ע"י תנאים הבאים:

i. $az + b\bar{z} = c$, ii. $Re(z(1-i)) < \sqrt{2}$, iii. $|z-1| = 2+i$, iv. $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

v. $|z-i| = |z+i|$, vi. $|z-1| + |z-5| < 4$, vii. $|z-1| \leq |z-5|$.

ג. הוכיחו: $X \subseteq \mathbb{R}^2$ סגורה אמ"מ $X \setminus \mathbb{R}^2$ פתוחה.

4. א. הגדירו את המושג: התכנסות סדרת נקודות ב \mathbb{R}^2 , $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$.

ב. נגדיר סדרה $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{i+a_n}$. האם היא מתכנסת? (כסדרה ב \mathbb{R}^2)

ג. הגדירו את המושגים: תחום ההתכנסות של טור, התכנסות בהחלט/בתנאי/במ"ש. בדקו את כל תכונות ההתכנסות עבור

הטורים: i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^6} x^n$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2\sin(x))^n}{n^2+300}$, iii. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^{n^3}}{n!}$.

ד. רשמו את טור טיילור של הפונקציות הבאות (סביב הנקודה $x=0$). בדקו את כל תכונות ההתכנסות עבור הטורים.

i. $f(x) = \sin^2(x^3)$, ii. $f(x) = \sin(1-x) \cdot \cos(1+x)$, iii. $f(x) = \ln(\frac{1}{6-5x+x^2})$.

5. עבור הפונקציות הבאות בדקו (בכל הנקודות של \mathbb{R}^2): רציפות, נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות, רציפות של נגזרות חלקיות.

i. $f(x, y) = \begin{cases} x \cdot \cos(\frac{y}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, ii. $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

6. א. נסחו את משפט Green.

ב. חשבו את האינטגרלים (כיוון המסילה הוא נגד כיוון השעון):
i. $\int_{\{x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}}\}} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$, ii. $\int_{y=a}^{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} + e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}} \frac{ds}{y^2}$.

iii. $\int_{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)} |y| ds$, iv. $\oint_{\{x^2+y^2=36\}} [(e^x - x^2 y) dx + (xy^2 - e^y) dy]$, v. $\oint_{x^2+y^2=1} \frac{xdy-ydx}{(x^2+y^2)^n}$, vi. $\oint_{x^2+y^2=1} \frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^n}$.

7. העבירו את המשטח $\{(x+y)^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ לצורה קנונית $(\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1)$ ע"י סיבוב של \mathbb{R}^3 .
(ודאו שההעתקה הליניארית שלכם היא אכן סיבוב)

8. א. נגדיר העתקה $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^3 - 3 \\ \sin(x_1) - e^{x_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

חשבו את מטריצת הנגזרות, $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}$, בנקודות בהן ההעתקה הפיכה מקומית.

ב. ההעתקה הליניארית (מרוכבת) $\mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathbb{C}$, $z \rightarrow i \cdot z$, משרה את ההעתקה הליניארית ממשיית, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^2$.

רשמו את המטריצה המייצגת של ההעתקה לפי הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^2 . חשבו את מטריצת הנגזרות של ההעתקה.