



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071
 אביב 2023 (מרצים: מ. פורת, י. שטראוס, ד. קרנר)
 תרגיל בית מס' 1.

1. א. בטאו את $\cos(4\alpha), \sin(5\alpha)$ כפולינומים ב $\cos(\alpha), \sin(\alpha)$.
 ב. חשבו $\sum_{k=0}^n \sin(k\phi), \sum_{k=0}^n \cos(k\phi)$. (כלומר, רשמו את הסכומים כביטויים קצרים דרך \cos, \sin)
 ג. יהי $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ויהי $z_0 \in \mathbb{C}$. הוכיחו: $p(z_0) = 0$ אם ומ"מ $p(\bar{z}_0) = 0$.
 ד. הוכיחו: כל השורשים של $p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$ נמצאים בתוך הכדור $\{|z| < 1\}$.
 (רמז: נתבונן ב $(1-z)p(z)$.)

2. א. נקבע מספר $a \in \mathbb{C}$ ונגדיר העתקה $\mathbb{C} \xrightarrow{\psi_a} \mathbb{C}$ ע"י $z \rightarrow a \cdot z$. הציגו את ψ_a כהעתקה לינארית $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\psi_a} \mathbb{R}^2$ ומצאו את המטריצה המייצגת $[\psi_a]$ (בבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^2).
 ב. $|a| = 1$. בדקו: $[\psi_a] \cdot [\psi_a]^t = \mathbb{I}$, $\det[\psi_a] = 1$. מה המשמעות הגאומטרית של ψ_a ?

- ב. נגדיר העתקת הצמדה $\mathbb{C} \xrightarrow{\tau} \mathbb{C}$ ע"י $z \rightarrow \bar{z}$. האם זאת העתקה \mathbb{C} -לינארית? הציגו את τ כהעתקה לינארית $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ומצאו את המטריצה המייצגת (בבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^2). חשבו $[\tau] \cdot [\tau]^t$, $\det[\tau]$. מה המשמעות הגאומטרית של τ ?

3. א. תהי $\{z_n\}$ סדרת נקודות ב \mathbb{C} . הוכיחו/הפריכו:
 i. $z_n \rightarrow z$ אם ומ"מ $(\operatorname{Re}(z_n), \operatorname{Im}(z_n)) \rightarrow (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \in \mathbb{R}^2$.
 ii. $z_n \rightarrow z$ אם ומ"מ $|z_n| \rightarrow |z|$ וגם $\arg(z_n) \rightarrow \arg(z) \pmod{2\pi}$. (כאן מניחים $z, z_n \neq 0$).
 iii. סדרה $\{z_n\}$ מתכנסת אם ומ"מ היא סדרת Cauchy.

- ב. חשבו את הגבולות (או הוכיחו כי אינם קיימים):
 i. $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n$ ($|z| \leq 1$ הבדילו בין מקרים $|z| < 1$ ו $|z| = 1$).
 ii. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{p(z)}{q(z)}$ כאן $p(z), q(z)$ פולינומים ב z .
 iii. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z^2 + \bar{z}^2}$.
 iv. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)^2}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^4}$.

4. א. ציירו את הקבוצות הבאות. אילו מהן פתוחות/סגורות/חסומות/קומפקטיות? תארו את הסגור/הפנים/השפה של הקבוצות. אילו מבין הקבוצות הבאות הן קשירות מסילתית/פשוטות קשר?
 i. $\{z \mid 0 < |\operatorname{Im}(z)| \leq \operatorname{Re}(z)^2\} \subset \mathbb{C}$.
 ii. $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0, |\operatorname{Im}(z)| < |\sin \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}|\} \subset \mathbb{C}$.
 iii. $\{z = e^t(\cos(t) + i \cdot \sin(t)), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.
 iv. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Ball}_{\frac{1}{n}}(\frac{1}{1+in}) \subset \mathbb{C}$.
 v. $\mathbb{C} \subset \bar{\mathbb{C}}$.
 vi. $\{| \operatorname{Re}(z) | \geq 1\} \cup \{\infty\} \subset \bar{\mathbb{C}}$.
 vii. $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \subset \bar{\mathbb{C}}$.

- ב. הוכיחו/הפריכו: $X \subset \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה אם ומ"מ $X \setminus \mathbb{C}$ סגורה.

- ג. ניקח קבוצה $X \subset \mathbb{C} \subset \bar{\mathbb{C}}$. הוכיחו/הפריכו:

- i. X פתוחה/סגורה כחת קבוצה של \mathbb{C} אם ומ"מ X פתוחה/סגורה כחת קבוצה של $\bar{\mathbb{C}}$.
 ii. X קשירה מסילתית/פשוטת קשר כחת קבוצה של \mathbb{C} אם ומ"מ X קשירה מסילתית/פשוטת קשר כחת קבוצה של $\bar{\mathbb{C}}$.

- ד. תהי $U \subset \mathbb{C}$ פתוחה וחסומה. הוכיחו/הפריכו: U קשירה מסילתית/פשוטת קשר אם ומ"מ $\bar{U} \subset \bar{\mathbb{C}}$ גם כזאת.