יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2020 (מרצים: מ. פורת, א.פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 11.

1. חשבו אינטגרלים:

א. i. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2}$ ii. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{1+x^2}}}{1+x^2}dx$ iii. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ עבור $n > 0$.

(כאן ניתן לעבור ל $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\dots)$ או להשתמש בקרן בזוית α ביחס לציר $\hat{x}$. מהי α? איזו דרך קצרה יותר?)

ב. במקרים הבאים התבוננו במלבן עם קודקודים $\{R, R+y_0 i, -R+y_0 i, -R\}$ עבור y_0 המתאים:

i. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}dx}{e^x+1}$, עבור $0 < a < 1$ ii. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)dx}{e^x+e^{-x}}$.

ג. בתרגיל בית 5, (שאלה ג.4) הוכחנו את למת ז'ורדן, עבור חצי-מעגל העליון: $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma} e^{iaz}f(z)dz = 0$, $a > 0$.

האם אותה טענה נכונה גם עבור חצי-מעגל התחתון? (רמז: שארית של $f(z) = \frac{1}{z^n}$).

ד. i. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xsin(x)}{x^2+a^2}dx$, $a > 0$ ii. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{cos(x)dx}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x^2+a_i^2)}$, $n \geq 1$, $0 < a_1 < a_2 < \cdots$ iii. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2}sin(t^2)dt$ (גזרה עם זווית $\theta = \frac{\pi}{8}$ והערך הידוע של $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$)   iv. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(x)}{x}dx$ v. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2}dx$

כאן ניתן להשתמש או בהצגה $\frac{sin(x)}{x} = Im(\frac{e^{ix}-1}{x})$ או במסלול $\{-\infty \rightsquigarrow -\epsilon \rightsquigarrow i\epsilon \rightsquigarrow \epsilon \rightsquigarrow \infty\}$.

2. א. התמרת פורייה של f מוגדרת ע"י $\hat{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx$. מצאו את התמרת פורייה במקרים הבאים.

(האם התשובה תלויה בסימן של t?)   i. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ ii. $f(x) = e^{-x^2}$ (היעזרו בשאלה 1)

iii. $f(x) = \frac{1}{p(x)}$ עבור פולינום $p(x)$ עם שורשים לא ממשיים, שונים, $z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \dots, z_n, \overline{z}_n$.

ב. התמרת לפלס של f מוגדרת ע"י $\mathfrak{L}(f)(s) = \int\limits_{0}^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$. התמרת לפלס הפוכה של $F(s)$ מוגדרת ע"י $\mathfrak{L}^{-1}(F)(x) =$ $\frac{1}{2\pi i}\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{\lambda-it}^{\lambda+it} F(s)e^{sx}ds$, כאשר $\lambda \in \mathbb{R}$ הינו קבוע כך שכל הנקודות הסינגולריות של $F(s)$ נמצאות משמאל לישר $Re(z) = \lambda$. (אינטגרל זה נקרא $Bromwich\ integral$ או $Fourier-Mellin\ integral$) חשבו את $\mathfrak{L}^{-1}(F)$ עבור פונקציות הבאות: i. $F(s) = \frac{1}{(a+s)^n}$ ii. $F(s) = \frac{1}{s^2-a^2}$.

3. א. עבור פולינומים $p(z), q(z)$ עם $deg(q) > deg(p)+1$ חשבו את $\underset{z=\infty}{Res}\frac{p(z)}{q(z)}$.

ב. הוכיחו/הפריכו (פתרו בכמה דרכים שונות)

i. אם ∞ נקודה סינגולרית מבודדת של f אז $\underset{z=\infty}{Res} f(z) = \underset{w=0}{Res} f(\frac{1}{w})$.

ii. אם ∞ נקודה סינגולרית סליקה של f אז $\underset{z=\infty}{Res} f(z) = 0$.

iii. אם $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ אז $\underset{z=\infty}{Res} f(z) = 0$.

ג. חשבו: $\int\limits_{|z|=10} \frac{sin(\frac{1}{z})dz}{cos(\frac{1}{z+i})}$.

ד. באילו מהתחומים הבאים קיימת פונקציה קדומה לפונקציה $f(z) = \frac{1}{sin\frac{1}{z^2}}$?

i. $\{Im(z) < 0,\ Re(z) > 0\}$ ii. $Ball_1(1) \setminus \{\frac{\pm 1}{\sqrt{\pi n}} |\ 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}$ iii. $\mathbb{C} \setminus Ball_1(0)$.

4. א. חשבו את $\underset{z=\infty}{Res}(f)$ עבור $f(z) = Log\frac{z}{z+2}$. האם ל f קיימת פונקציה קדומה בתחום $\mathbb{C} \setminus [-2, 0]$?

ב. נגדיר $g(z) = e^{\frac{f(z)}{n}}$. בדקו כי g הינה ענף אנליטי של $\sqrt[n]{\frac{z}{z+2}}$. באיזה תחום? חשבו את $\int\limits_{|z|=3} g(z)dz$.