יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2023 (מרצים: מ. פורת, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 12.

1. שאלות חזרה

א. נניח ש $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $|f(z)|\neq 1$ עבור כל $z\in\mathbb{C}$. האם f בהכרח קבועה?

ב. יהי Δ משולש שווה צלעות, עם קודקודים a,b,c. נגדיר $f(z)=(z-a)(z-b)(z-c)$.
מצאו את $\sup_{z\in\Delta}|f(z)|$. (רמז: את התנאי $z\in[a,b]$ כדאי לנסח בצורה $z=a(\frac{1}{2}+t)+b(\frac{1}{2}-t)$, $t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.)

ג. יהי $\mathcal{U}$ תחום חסום ותהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ ורציפה ב $\overline{\mathcal{U}}$. ניקח פולינום $p(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$, שכל השורשים שלו פשוטים ונמצאים ב $\mathcal{U}$. נגדיר $q(z):=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{U}}\frac{f(w)}{p(w)}\frac{p(w)-p(z)}{w-z}dw$. הוכיחו: $q(z)$ הינו פולינום המקיים: $\{q(z_j)=f(z_j)\}$.
(ל $q(z)$ קוראים $Lagrange\ interpolating\ polynomial$ ויש לו שימושים רבים באנליזה נומרית)

ד. ניתן הוכחה נוספת של משפט Liouville. תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ פונקציה חסומה.

i. בהינתן $a,b\in\mathbb{C}$ נקודות זרות, חשבו $\int_{|z|=R}\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$, כאן $R>max(|a|,|b|)$.

ii. מבלי להשתמש בסעיף (א), הוכיחו: $\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}=0$. הסיקו את המשפט.

2. חשבו: i. $\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^5+z+1}$ ii. $\oint_{|z|=R\gg 1}\frac{dz}{p(z)}$, כאן $p(z)=c_dz^d+\cdots+c_0$, $c_d\neq 0$ iii. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-i)^2sin(x-i)}$

iv. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(i+x)^2sin\left(\frac{i-x}{i+x}-\frac{1}{3}\right)}$ (כאן x ממשי) v. $\int_{\gamma}\frac{dz}{(e^{1-z}-1)(z^3-1)}$, עבור העקום: $\gamma=\{z=x+iy|\ x=\frac{1}{2}\}\subset\mathbb{C}$.

3. הוכיחו: למשוואה $sin(tan(z))-tan(sin(z))=\epsilon z^6$ יש לפחות 5 שורשים שונים, כאשר $0\neq|\epsilon|\ll 1$.

4. א. תהי f מרומורפית ב $\mathbb{C}$, כך שכל האפסים והקטבים שלה נמצאים בתוך $Ball_r(z_0)$. הוכיחו:

i. קיימת פונקציה $h\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\overline{Ball_r(z_0)})$ המקיימת $f(z)=e^{h(z)}$ אמ"מ

ii. מספר האפסים של f ב $Ball_r(z_0)$ שווה למספר הקטבים (כולל הריבויים).

הסיקו: אם $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ לא מתאפסת באף נקודה אז $f(z)=e^{h(z)}$ עבור $h\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$. (כלומר $Log(f)$ מוגדר היטב)

ב. תהיינה $f,g\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$. הוכיחו: $f^2+g^2\equiv 1$ אמ"מ קיימת $\phi\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ כך ש $g(z)=sin(\phi(z))$, $f(z)=cos(\phi(z))$.

ג. תהי f מרומורפית ב $\mathbb{C}$. נניח שקבוצת הערכים של f זרה לתת קבוצה $\mathbb{R}_{\leq 0}\subset\mathbb{C}$. הוכיחו: $f=const$.

5. א. יהי $p(z)$ פולינום מדרגה n. חשבו $\lim_{R\to\infty}\oint_{|z|=R}\frac{p'(z)}{p(z)}dz$.

ב. נגדיר מסילה $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ כאשר $\gamma_1(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $\gamma_2(t)=-1+2e^{-2it}$, $t\in[0,2\pi]$, $\gamma_3(t)=1-i+e^{it}$, $t\in[\frac{\pi}{2},\frac{9\pi}{2}]$. חשבו את האינדקס $\eta(\gamma,z)$ עבור כל $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$.

ג. מצאו את האינדקס של מסילות הבאות, ביחס לראשית:

i. $\{|z|=1\}\xrightarrow{sin}\mathbb{C}$ ii. $\{|z|=17\}\xrightarrow{sin}\mathbb{C}$ iii. $\{|z|=4\pi+\frac{\pi}{4}\}\xrightarrow{\frac{cos(z)}{sin^2(z)}}\mathbb{C}$.

ד. יהי $\mathcal{U}\subset\{z|\ Re(z)>0\}$ תחום חסום ותהי $f(z)=e^{-z}-a_0-a_1z$, $a_0>1$, $a_1\geq 0$.
מצאו את האינדקס של מסילה $\partial\mathcal{U}\xrightarrow{f}\mathbb{C}$.

.

ה. נגדיר $[0,2\pi]\xrightarrow{\gamma}\mathbb{C}$ ע"י $\gamma(t)=\frac{\left((cos(2t)-cos(t))+i(sin(2t)-sin(t))+0.25\right)e^{\frac{cos(t)-2-isin(t)}{5-4cos(t)}}}{\frac{1}{2}sin\left(cos(t)+isin(t)\right)-isin(t)-cos(t)}$. כמה פעמים γ מקיפה את הראשית? (הדרכה: מצאו פונקציה f כך ש $\gamma(t)=f(e^{it})$. בטאו את אינדקס $\eta(\gamma,0)$ בעזרת f.)

ו. מצאו את מספר האפסים של $z^4+8z^3+3z^2+8z+3$ בתחום $\{z|\ Re(z)>0\}$. (הדרכה: נגדיר מסילה סגורה $[iR,-iR]\cup\Gamma_R$, כאשר Γ_R= חצי מעגל העובר דרך הנקודות $-iR,R,iR$. השתמשו בעקרון הארגומנט עבור $f(z)$ בתוך המסילה ובדקו את הגבול $R\to\infty$. שימו לב שהפולינום z^4+3z^2+3 לא מתאפס עבור $z\in i\mathbb{R}$.)