יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2023 (מרצים: מ. פורת, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 13.

1. (שאלות חזרה)

א. תהינה $f, g \in Ball_\epsilon(0)$ ונניח ש $|\frac{g}{f}| < 10^{-10}$ על השפה $\partial Ball_\epsilon(0)$. האם $\frac{g}{f}$ בהכרח חסומה ב $Ball_\epsilon(0)$?

ב. תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ לא קבועה. הוכיחו: f שולחת קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות.
(אם $f'(z)$ לא מתאפסת באף נקודה אז זה משפט על העתקה פתוחה. עכשיו ניתן לטפל גם מקרה הכללי)

ג. האם הטענה של סעיף ב' מתקיימת גם עבור פולינומים ממשיים?

ד. האם קיימת פונקציה $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ שתמונתה היא $\mathbb{C} \setminus (0,1)$? (כאן $(0,1)$ קטע פתוח בציר $\hat{x}$)

ה. נניח שפונקציה $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $f(z) \notin [0,1]$ עבור כל $z \in \mathbb{C}$. האם f בהכרח קבועה?
(רמז: פונקציה $\sqrt{z(z-1)} = e^{\frac{1}{2}Log(z(z-1))}$ הנה אנליטית ב $\mathbb{C} \setminus [0,1]$.)

ו. עבור אילו ערכים של α, β לפונקציה $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z^2+1}$ קיימת פונקציה קדומה ב $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$?

ז. חשבו $\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$ עבור מסילה $\gamma = \{|z| = 2,\ 0 \le Im(z) \le \frac{1}{\sqrt{3}}Re(z)\} \subset \mathbb{C}$ (בכיוון השעון).
כאן $\sqrt[4]{\dots}$ הינו הענף האנליטי המקיים $\sqrt[4]{1} = -i$.

ח. חשבו $\int_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{sin\frac{1}{z}}dz$.

2. א. מצאו את סדר האפס, $ord_0(f)$, עבור פונקציה $f(z) = \frac{sin(z^7)}{Log(1+z^3)-z^3+z^6}$. (הענף הראשי של Log)

ב. יהי $\mathcal{U}$ תחום פשוט קשר ותהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. נניח ש f מתאפסת רק בנקודה $z_0 \in \mathcal{U}$ ו $ord_{z_0}(f) = n$.
הוכיחו: קיימת הצגה $f(z) = (g(z))^n$, כאשר $g'(z_0) \neq 0$ ו g אנליטית ב $\mathcal{U}$ כולו. (השוו לשאלה 1.ג של ת"ב 8.)

ג. תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_\epsilon(z_0))$, כך ש $f'(z_0) \neq 0$. עבור z_1, z_2 מספיק קרובות ל z_0 הוכיחו: אם $f(z_1) = f(z_2)$ אז $z_1 = z_2$.

ד. תהי f אנליטית בתחום $\mathcal{U}$ קשיר מסילתית. נניח שעבור כל $z_0 \in \mathcal{U}$, וכל $\epsilon > 0$ קיימות נקודות $z_1, z_2 \in Ball_\epsilon(z_0)$ שונות כך ש $f(z_1) = f(z_2)$. האם f בהכרח קבועה?

ה. הוכיחו: עבור כל $0 < \epsilon \ll 1$ למשוואה $\sqrt[3]{1+3z^3} - Log(1+z^3) = 1+\epsilon$ יש לפחות 5 פתרונות בסביבה קטנה של 0.
(הפונקציות כאן הן ענפים ראשיים)

3. א. כמה פתרונות של משוואה $e^{iz} = z^2$ נמצאים בתחום $\{Re(z) \ge 0\}$?

ב. הוכיחו: כל שורשי הפולינום $z^5 + 3z + 5$ נמצאים בטבעת $1 < |z| < 2$.

ג. כמה פתרונות של משוואה $z^7 + z^3 - 4z + 1 = 0$ נמצאים בטבעת $1 < |z| < 3$?

ד. (הכללה של עקרון הארגומנט) תהי f מרומורפית ב $\overline{\mathcal{U}}$ עם אפסים בנקודות $z_1, \dots, z_k \in \mathcal{U}$, מסדרים $n_1, \dots, n_k$, ועם קטבים בנקודות $w_1, \dots, w_l \in \mathcal{U}$ מסדרים $m_1, \dots, m_l$. תהי $g \in \mathcal{O}(\overline{\mathcal{U}})$. נניח כי לפונקציות f, g אין אפסים ב $\partial\mathcal{U}$.
הוכיחו: $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{U}} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{k} n_j g(z_j) - \sum_{j=1}^{l} m_j g(w_j)$.

ה. נגדיר $p(z) = z^{10} + 3z^3 + 1$ ונתבונן בעקומה $p(\partial Ball_1(0))$. כמה פעמים העקומה עוקפת את הראשית?

ו. נגדיר $\gamma = \{z(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$, $f(z) = sin(z) + cos(z)$. כמה פעמים העקומה $f(\gamma)$ עוקפת את הראשית?

4. א. נניח שפונקציה רציונלית $\frac{p(z)}{q(z)}$ מחזירה רק ערכים ממשיים סופיים על $\{|z|=1\}$. מה ניתן להגיד על האפסים/קטבים שלה?

ב. תהי $Ball_2(0) \xrightarrow{f} Ball_1(0)$ פונקציה אנליטית. כמה פתרונות יש למשוואה $f(z) = z^n$ ב $Ball_2(0)$?

ג. נניח ש $Re(c) > 1$. כמה פתרונות של משוואה $ze^{c-z} = 1$ נמצאים בתוך $Ball_1(0)$?

ד. תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_2(0) \setminus \overline{Ball_1(0)})$ בלי אפסים ב $Ball_2(0) \setminus \overline{Ball_1(0)}$.
הוכיחו: קיימת הצגה $f(z) = z^n e^{g(z)}$, כאן $n \in \mathbb{Z}$ ו $g \in \mathcal{O}(Ball_2(0) \setminus \overline{Ball_1(0)})$.