



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2023 (מרצים: מ. פורת, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 3.

1. יהי $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר מסילתית ותהי $f = u + iv \in \mathcal{O}(U)$.

א. הוכיחו: אם $u = \text{const}$ אז $f = \text{const}$.

ב. הוכיחו: אם $|f| = \text{const}$ אז $f = \text{const}$. (הערה: ניתן לפתור את א', ב' לפחות בשתי דרכים שונות.)

ג. יהי $p(t_1, t_2) \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ פולינום לא קבוע עם מקדמים ממשיים. הוכיחו: אם $p(u, v) = \text{const}$ אז $f = \text{const}$.
(הדרכה: כמו בסעיפים הקודמים קבלו: $\frac{\partial p}{\partial t_1}|_{(u,v)} = 0 = \frac{\partial p}{\partial t_2}|_{(u,v)}$. הפעילו אינדוקציה.)

2. הפונקציות הבאות הינן פונקציות אלמנטריות במשתנים (x, y) או (r, ϕ) . האם ניתן להציג אותן כפונקציות אלמנטריות במשתנה יחיד z ?

i. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + 2i \cdot \text{artan} \frac{y}{x}$ ii. $f(re^{i\phi}) = \frac{\cos(2\phi) - i \sin(2\phi)}{r^2}$

3. יהי $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום סימטרי ביחס לציר \hat{x} (כלומר הוא נשמר תחת הצמדה).

הוכיחו: פונקציה $U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ אנליטית אמ"מ $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ אנליטית.

4. תהי $\mathbb{R}_{x_1 x_2}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{x_3 x_4}^2$ פונקציה גזירה ברציפות, עם המישור המשיק (בנקודה מסוימת): $\{x_1 + 2x_3 = 0, x_2 + 3x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

נגדיר $w = x_3 + ix_4, z = x_1 + ix_2$ ונחשוב על f כפונקציה $\mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$. האם f יכולה להיות אנליטית? (רמז: המישור המשיק הנו תת-מרחב וקטורי ממשי של \mathbb{R}^4 . האם הוא גם תת-מרחב וקטורי מרוכב של \mathbb{C}^2 ?)

5. א. תהי $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $\partial_x f - i \cdot \partial_y f = 0$ (ב \mathbb{R}^2 כולו). האם f בהכרח קבועה?

ב. נניח ש $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $f(0) = 1, f'(z) = f(z)$. הוכיחו: $f(z) = e^z$. (רמז: התבוננו ב $(f(z)e^{-z})$)

6. א. יהי f הענף הראשי של $\sqrt[n]{z}$. הוכיחו/הפריכו:

i. $\sqrt[n]{z^n} = z$ ii. $(\sqrt[n]{z})^n = z$ iii. $\sqrt{z \cdot e^{2\pi i}} = \sqrt{z}$ iv. $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$

v. אם z, w, zw נמצאים בתחום הגדרה של הענף הראשי אז $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$

vi. אם $Re(z) > 0, Re(w) > 0$ אז $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$ vii. $\sqrt[n]{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\sqrt[n]{z}}$

ב. תארו את התמונה של הענף הראשי של $\sqrt[n]{z}$. לאן הפונקציה שולחת את הקרן $Ray_{a,b} := \{(at, bt) | t \in \mathbb{R}_{>0}\}$?

ג. יהי $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \{Re(z) < 0\}$ ענף אנליטי של $\sqrt[4]{z}$ המקיים $f(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}) = e^{\frac{11\pi i}{16}}$. חשבו את $f(-1)$.

ד. יהי $\mathbb{C} \xrightarrow{f} U$ ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$. חשבו $\frac{z \cdot f'(z)}{f(z)}$.

ה. יהיו $\mathbb{C} \xrightarrow{f_1, f_2} U$ שני ענפים אנליטיים של $\sqrt[n]{z}$. חשבו: $\frac{f_1(z) \cdot f_2'(z)}{f_1'(z) \cdot f_2(z)}$. עבור כל $z \in U, z \neq 0$.

7. א. נראה שלא ניתן להכליל את משפט על ערך הביניים (של חדו"א 1) לפונקציות מרוכבות. נתבונן בפונקציה $f(z) = e^{iz}$.

המוגדרת על קטע $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. $[0, \pi] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. הראו שאף נקודה של קטע $(f(\pi), f(0)) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ לא מתקבלת כערך של f . (למרות ש f רציפה.)

ב. נזכיר את משפט Lagrange (של חדו"א 1): אם $[a, b] \xrightarrow{f} R$ רציפה ב $[a, b]$ וגזירה ב (a, b) אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$

כך ש: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. האם המשפט מתקיים גם עבור פונקציות מרוכבות אנליטיות?