



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2023 (מרצים: מ. פורת, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 4.

1. א. יהי $Log(z)$ הענף הראשי של פונקצית לוגריתם. חשבו $Log\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)$ ($a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$).
ב. האם Log היא פונקציה חז"ע? לאן Log שולחת את הקרן $Ray_{a,b} := \{(at, bt) | t \in \mathbb{R}_{>0}\}$?
ג. הוכיחו/הפריכו:

i. $Log(e^z) = z$ ii. $e^{Log(z)} = z$ iii. $Log(e^{z+2\pi i}) = z + 2\pi i$ iv. $Log\left(\frac{1}{z}\right) = -Log(z)$

v. אם z, w, zw הם בתחום ההגדרה של Log אז $Log(zw) = Log(z) + Log(w)$

vi. אם $Re(z), Re(w) > 0$ אז $Log(zw) = Log(z) + Log(w)$

ד. האם לפונקציה $\frac{1}{z}$ קיימת פונקציה קדומה ב $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (כלומר, פונקציה $F(z)$ אשר מקיימת $F'(z) = \frac{1}{z}$)

(spoiler: איך זה קשור לשדה וקטורי $\left(\frac{-y, x}{x^2+y^2}\right)$, המשמר מקומית, אך לא גלובלית?)

2. א. הוכיחו/הפריכו:

i. הטור $\sum z_n$ מתכנס אמ"מ הטורים $\sum Re(z_n), \sum Im(z_n)$ מתכנסים.

ii. אם הטור $\sum z_n$ מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס במובן הרגיל.

iii. נניח שטור $\sum a_n z^n$ מתכנס בנקודה z_0 . אז (רדיוס ההתכנסות) $|z_0| \leq R$.

iv. נניח שטור $\sum a_n z^n$ מתבדר בנקודה z_0 . אז (רדיוס ההתכנסות) $|z_0| \geq R$.

ב. נניח שרדיוסי ההתכנסות של $\sum a_n z^n, \sum b_n z^n$ הינם R_a, R_b . מה ניתן לומר על רדיוס ההתכנסות של $\sum a_n b_n z^n$?

ג. מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum \frac{z^n}{n^s}$, עבור כל $s \in \mathbb{R}$. (מספיק לבדוק רק את נקודות הפנים).
איפה ההתכנסות היא במ"ש? בדקו שבנקודות הפנים של תחום ההתכנסות הטור מתכנס לפונקציה אנליטית $f(z)$.
עבור $s = -2$ רשמו את $f(z)$ בצורה מפורשת.

ד. מצאו את טור חזקות המתכנס לפונקציה f אשר מקיימת: $f(z^2) = z + f(z)$. מהו תחום ההתכנסות?

3. א. הוכיחו: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ב \mathbb{C} כולו. (חזרו על שתי ההוכחות שניתנו בהרצאה)

ב. הוכיחו (ב \mathbb{C} כולו): $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ג. פתחו את $\frac{1}{z-z_0}$ לטור חזקות סביב נקודה z_1 . $\frac{1}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_1)^n$, $z_1 \neq z_0$. מהו תחום ההתכנסות של הטור?

ד. הוכיחו: $Log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ ב $Ball_1(0)$.

ה. פתחו את הפונקציה $f(z) = z^3 \cdot Log(1+z^3)$ לטור חזקות סביב הנקודה $z=0$.

4. נגדיר $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, עם מקדמים ממשיים, $a_n \in \mathbb{R}$. נניח שהטור מתכנס ב $Ball_r(0)$.

א. נניח ש f מתאפסת בקטע ממשי מסוים, $(-\epsilon, \epsilon) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. הוכיחו: f מתאפסת זהותית ב $Ball_r(0)$ כולו.

ב. תהי $\mathbb{R} \xrightarrow{g} (-r, r)$ הצמצום של f לציר הממשי, כלומר $g(x) = f(x)$ עבור $x \in (-r, r)$. נניח ש g מקיימת משוואה

$$\sum_{j=1}^n c_j \frac{d^j g(x)}{dx^j} + c_0 = 0$$

כאן $\{c_j \in \mathbb{R}\}$. הוכיחו: f מקיימת את המשוואה $\sum_{j=1}^n c_j \frac{d^j f(z)}{dz^j} + c_0 = 0$.