



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071
אביב 2023 (מרצים: מ. פורת, י. שטראוס, ד. קרנר)
תרגיל בית מס' 7.

1. (שאלות חזרה)

- א. האם קיימת פונקציה $f \in \mathcal{O}(Ball_\epsilon(0))$ המקיימת $|f(z)| = e^{|z|}$?
ב. תהי $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ונקבע סדרה $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ המקיימת: $\theta_n \in [-\alpha, \alpha]$.
הוכיחו: הטורים $\sum |z_n|$, $\sum z_n$ מתכנסים/מתבדרים יחד.
ג. האם אותה הטענה מתקיימת עבור $\theta_n \in [\alpha, \pi - \alpha]$?
ד. חשבו $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta)$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\theta)$, כאשר $0 \leq r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.

2. א. נניח שהטור $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס ב $Ball_R(0)$. נבחר מסילה $\gamma \rightarrow Ball_R(0)$.

הוכיחו: $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} z^n dz$ (בפרט, הטור בצד ימין מתכנס)

ב. נניח שרדיוס ההתכנסות של הטור $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ הינו $R > 0$. הוכיחו שעבור כל $r < R$ מתקיים:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

(הצדיקו את כל המעברים)

ג. נניח שהטור $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס ב $Ball_1(0)$. עבור כל $|z| < 1$ נקבע מסילה $z \rightsquigarrow 0$ (בתוך $Ball_1(0)$) ונגדיר

$$F(z) = \frac{\int f(s) ds}{1-z}$$

הראו כי $F \in \mathcal{O}(Ball_1(0))$ ומתקיים: $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} \right) z^{n+1}$

ד. הוכיחו: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על כל קבוצה קומפקטית חזרה ל \mathbb{N} . בדקו שהפונקציה הגבולית, f , הינה אנליטית. (שימו לב: הטור אינו טור חזקות. האם מותר לגזור איבר-איבר?) חשבו את $f(z+1) - f(z)$.

3. א. תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_R(0))$ ונניח שעבור סדרה $z_n \leftarrow z_0 \in \partial Ball_R(0)$ מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = \infty$.

הוכיחו: רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של f ב $z = 0$ הינו בדיוק R .

ב. פתחו את $f(z) = \frac{\sin(z)}{z-\pi}$ לטור טיילור בנקודה $z = 0$. מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור.

ג. מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של $f(z) = \tan(i \cdot \sin(z))$ בנקודה $z = 0$.

4. א. תהי $f \in \mathcal{O}(U)$ ונניח ש $\overline{Ball_r(z_0)} \subset U$. נניח ש f מקבלת ערכים ממשיים על $\partial Ball_r(z_0)$. הוכיחו: $f(z_0) \in \mathbb{R}$.

ב. תהי $f \in \mathcal{O}(\overline{Ball_r(0)})$ ונניח ש f חסומה על $\{|z| = r\}$ בצורה הבאה: $|f| \leq a$ על חצי המעגל העליון, $|f| \leq b$ על חצי המעגל התחתון. הוכיחו: $|f(0)| \leq \sqrt{ab}$. (רמז: השתמשו ב $f(z) \cdot f(-z)$).

5. א. תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ונניח שמתקיים $|f(z)| \leq a + b|z|^k$. הוכיחו: הינה פולינום מדרגה $deg(f) \leq k$. הכוונה:

i. הוכיחו: אם $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ אז $f_{-1}(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$ הינה גם פונקציה אנליטית ב \mathbb{C} כולו.

ii. הוכיחו: אם $|f| \leq a + b|z|^k$ אז $|f_{-1}(z)| \leq \tilde{a} + \tilde{b}|z|^{k-1}$.

ב. יהי $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ותהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ המקיימת: $f(z+1) = f(z)$, $f(z+\tau) = f(z)$. (כלומר f היא פונקציה דו-מחזורית). הוכיחו: f פונקציה קבועה.

ג. תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ לא קבועה. הוכיחו: התמונה של f מקיימת $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$. הכוונה:
 i. הוכיחו: אם קיים $\epsilon > 0$ כך ש $|f(z)| > \epsilon$, לכל $z \in \mathbb{C}$, אז $f(z)$ קבועה.
 ii. הוכיחו: אם קיימים $\epsilon > 0$ ו $w \in \mathbb{C}$, כך ש $|f(z) - w| > \epsilon$ לכל $z \in \mathbb{C}$, אז $f(z)$ קבועה.

6. א. חשבו את הסדר (הריבוי) $ord_{z=0} f(z)$ עבור $f(z) = z^2 \cdot \text{Log}(1 + z^5) - \sin(z^7)$.
 ב. תהי $f \in \mathcal{O}(\text{Ball}_r(0))$ ונניח ש $ord_{z=0} f(z) = \infty$. הוכיחו: $f(z) \equiv 0$.
 ג. תהי $f \in \mathcal{O}(U)$ ונניח שהסדר (הריבוי) שלה בנקודה $z_0 \in U$ הנו $\infty > p$.
 הוכיחו: $f(z) = (z - z_0)^p g(z)$, כאשר $g(z) \in \mathcal{O}(U)$ ו $g(z_0) \neq 0$.

7. א. הוכיחו: כל נקודת פנים של קבוצה $S \subset \mathbb{C}$ הינה נקודת הצטברות.
 ב. תהי $S \subset \mathbb{C}$ קבוצה קשירה מסילתית. הוכיחו: כל הנקודות שלה הינן נקודות הצטברות.
 ג. הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):
 i. אם $f \in \mathcal{O}(U)$ לא קבועה אז יש לה רק מספר סופי של אפסים בכל תת קבוצה סגורה של U .
 ii. אם $f \in \mathcal{O}(U)$ לא קבועה אז יש לה רק מספר סופי של אפסים בכל תת קבוצה חסומה של U .
 iii. אם $f \in \mathcal{O}(U)$ לא קבועה אז יש לה רק מספר סופי של אפסים בכל תת קבוצה קומפקטית של U .
 iv. תהי $f \in \mathcal{O}(\text{Ball}_R(0))$ ונניח שעבור $z = x + iy$ פונקציה $f(x)$ הינה (אי-)זוגית. אז גם $f(z)$ (אי-)זוגית.

8. א. השתמשו בעיקרון היחידות עבור פונקציות אנליטיות כדי לפתור (בצורה מיידית) את שאלה 4 ת"ב.2, ואת שאלה 4 ת"ב.4.
 ב. האם קיימת $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ כך ש $\{f(\frac{1}{n}) = 0\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f(i) = 1$?
 ג. תהי $f \in \mathcal{O}(\text{Ball}_2(0))$ ונניח שעבור כל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)dz}{(n+1)z-1} = 0$. האם בהכרח מתקיים $f \equiv 0$?