



# יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

2023 (מרצים: מ. פורת, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 8.

## 1. שאלות חזרה

א. חשבו  $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{zt} dz}{z^2+1}$ , כאן  $t \in \mathbb{R}$ .

ב. i. האם קיים טור  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  המקיים: רדיוס ההתכנסות שלו  $r$  והטור מתכנס ב  $\overline{Ball_r(0)}$  כולו?

ii. האם קיים טור  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  המקיים: רדיוס ההתכנסות שלו  $r$  והטור לא מתכנס באף נקודה של  $\partial Ball_r(0)$ ?

iii. נגדיר פונקציה ע"י  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ונניח שמתקיים:  $\limsup_{|z|=1} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ . חשבו  $\int_{|z|=1} f(z) dz$ .

ג. תהי  $f \in \mathcal{O}(U)$  ונניח ש  $ord_{z_0}(f) = n$  עבור  $z_0 \in U$ . הוכיחו שקיימת  $g \in \mathcal{O}(Ball_\epsilon(z_0))$ , עבור  $\epsilon > 0$  קטן, המקיימת:  $f(z) = g(z)^n$ . (ניסוח אחר: קיימת החלפת משתנים אנליטית,  $w(z) \leftrightarrow z(w)$ , המעבירה את  $f(z)$  ל  $z^n$ ). (השוו לשאלה 1.6 של תרגיל בית 7)

2. א. נניח שפונקציה  $f \in \mathcal{O}(Ball_\epsilon(0))$  מקיימת:  $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+1}$  עבור  $n \in \mathbb{N}$  כגון  $n \ll 1$ . חשבו את  $f(\frac{\epsilon}{2})$ .

ב. תהי  $f \in \mathcal{O}(Ball_{\frac{3}{2}}(0))$ . הוכיחו שקיים  $n \in \mathbb{N}$  שעבורו:  $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{1}{n+1}$ .

ג. תהי  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  לא קבועה ומקיימת:  $f(z) = f(\lambda \cdot z)$  עבור כל  $z \in \mathbb{C}$ . מה הערכים האפשריים של  $\lambda$ ?

ד. נניח ש  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  מקיימת:  $f(it) = f(it + i\sqrt{2}) = f(it + i)$  עבור כל  $t \in \mathbb{R}$ . מצאו את  $f$ .

ה. תהי  $f \in \mathcal{O}(U)$ . ניקח את הפיתוח טיילור שלה בנקודה  $z_0$ :  $f(z) = \sum c_{n,z_0} (z - z_0)^n$ .

נניח שעבור כל נקודה  $z_0 \in U$  מתקיים:  $c_{1001,z_0} = 0$ . הוכיחו:  $f$  הינה פולינום.

\*ו. תהי  $f \in \mathcal{O}(U)$ . ניקח את הפיתוח טיילור שלה בנקודה  $z_0$  כ  $f(z) = \sum c_{n,z_0} (z - z_0)^n$ . נניח שעבור כל נקודה  $z_0$  מתקיים:  $c_{n,z_0} = 0$  עבור  $n$  מסוים (התלוי ב  $z_0$ ). הוכיחו:  $f$  הינה פולינום. (רמז: קבוצת בת-מניה)

3. א. מצאו  $\min, \max$  של פונקציה  $|z^4 - z|$  בתוך  $\{|z| \leq 1\}$ .

ב. נסמן  $[0, 2\pi]^2 := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in [0, 2\pi]\}$ . מצאו  $\max_{z \in [0, 2\pi]^2} |\sin(z)|$ .

ג. i. יהי  $|a| \neq 1$ . הראו כי לכל  $z$  המקיים  $|z| = 1$  מתקיים:  $|z - a| = |1 - \bar{a}z|$ .

ii. תהיינה  $|a_1|, \dots, |a_n| < 1$ . נגדיר  $f(z) = \frac{(z-a_1)\dots(z-a_n)}{(1-\bar{a}_1z)\dots(1-\bar{a}_nz)}$ . הוכיחו ש  $|f(z)| < 1$  לכל  $|z| < 1$ .

ד. תהיינה  $f, g \in \mathcal{O}(\bar{U})$ . הוכיחו:  $\max(|f| + |g|)$  מתקבל רק ב  $\partial U$ . (רמז: תתבוננו ב  $e^{i\alpha} f + e^{i\beta} g$ )

ה. תהי  $f \in \mathcal{O}(U)$  לא קבועה ותהי  $z_0 \in U$ . הוכיחו/הפריכו:  $|f|$  אינה נקודת  $\min$  מקומי של  $|f|$ .

ii. אם  $f(z_0) \neq 0$  אז  $z_0$  אינה נקודת  $\min$  מקומי של  $|f|$ .

iii. פונקציות  $Re(f), Im(f)$  לא מקבלות  $\min/\max$  מקומיים ב  $z_0$ .

ו. יהי  $Box \subset \mathbb{C}$  ריבוע (סגור) עם מרכז בראשית וצלעות  $l_1, l_2, l_3, l_4$  המקבילים לצירים. תהי  $f \in \mathcal{O}(\overline{Box})$  ונניח:

$\{|f|_{l_i} \leq m_i\}_{i=1,4}$ . הוכיחו:  $|f(0)| \leq \frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4}$ . (רמז: הגדירו פונקצית עזר עם חסם אחיד על הצלעות.)

4. א. תהי  $\overline{Ball_1(0)} \xrightarrow{f} \overline{Ball_1(0)}$  אנליטית. נניח ש  $ord_0(f) \geq n$ . הוכיחו:  $|f(z)| \leq |z|^n$ .

ב. תהי  $f \in \mathcal{O}(\overline{Ball_1(0)})$  כך ש  $|f(z)| \leq 1$  ו  $f(0) = 0$ . הוכיחו:  $\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$  מתכנס במ"ש ב  $Ball_r(0)$  עבור כל  $r < 1$ .

ג. תהי  $\overline{Ball_1(0)} \xrightarrow{f} \overline{Ball_1(0)}$  אנליטית ומקיימת:  $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ . הוכיחו:  $f(z) \equiv z$ .

ד. תהי  $f \in \mathcal{O}(\overline{Ball_1(0)})$  כך ש  $|f(z)| \leq 1$  ו  $f(0) = 0$ . הוכיחו:  $|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2$ .

ה. נניח ש  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  מקיימת:  $|f| \leq 1$ . הוכיחו:  $|\oint_{|z|=1} f(z) dz| \leq 4$ .