



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2023 (מרצים: מ. פורת, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 9.

1. נניח שפולינום $p(z) = \sum_{j=0}^n p_j z^j$ חסום ע"י 1 ב $Ball_1(0)$. הראו כי $|p_j| \leq 1$.

2. נקבע טור לורן $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$.
 א. הוכיחו: קיימים $0 \leq r \leq R \leq \infty$ כך שהטור מתכנס בהחלט בתחום $\{z \mid r < |z| < R\}$ ומתבדר בכל נקודה של התחום $\{z \mid |z| < r\} \cup \{z \mid |z| > R\}$.
 ב. איך ניתן לחשב את r, R דרך $\{c_n\}$?

3. א. פתחו את הפונקציות הבאות לטורי לורן סביב הראשית בכל הטבעות בהן מוגדרת הפונקציה:

i. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ ii. $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^3}$ iii. $\frac{\sin \frac{1}{z}}{z-2}$

ב. מצאו את החלק העיקרי של טור לורן של $\frac{e^{z^2}}{1-\cos(e^z-1)}$, בטבעת $0 < |z| < R$. מצאו את הערך הגדול ביותר של R .

ג. תהי $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ ונניח שעל המעגל $\{|z| = \rho\}$ מתקיים $|f(z)| \leq C$. הוכיחו: עבור כל $n \in \mathbb{Z}$

ד. נגדיר $q = e^{2\pi i \alpha}$ כאשר $\alpha \in (0, 1)$ לא רציונלי. נקבע $\mathcal{U}_{r,R} := \{z \mid r < |z| < R\}$. מצאו את כל הפונקציות $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_{r,R})$ המקיימות: $f(z) = f(qz)$ עבור כל $z \in \mathcal{U}_{r,R}$.

4. א. מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות וציינו את סדר הפונקציה בכל נקודה: i. $\frac{\tan(z\sqrt{2})}{\cotan(z\sqrt{3})}$ ii. $\frac{1}{e^{\cos(z)}}$

ב. תהיינה $f, g \in \mathcal{O}(\mathcal{U} \setminus \{z_0\})$. מיינו את סוג הנקודה $z = z_0$ (ואת סדר הפונקציה בה) עבור הפונקציות:

a. $f + g$ b. $f \cdot g$ c. $\frac{1}{f}$ d. f' e. $g^{(n)}$ f. e^f כאשר ידוע כי:

i. ל f יש נקודה סינגולרית עיקרית ול g יש קוטב מסדר m ב z_0 .

ii. ל f יש נקודה סינגולרית סליקה ול g יש נקודה סינגולרית עיקרית ב z_0 .

iii. ל f יש קוטב מסדר n ול g יש קוטב מסדר m ב z_0 ($m < n$).

ג. נניח שעבור $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U} \setminus \{z_0\})$ מתקיים: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$. הוכיחו: z_0 הינה נקודה סינגולרית סליקה של f .

(לטענה זו קוראים: Riemann's principle of removable singularities)

ד. הוכיחו: בכל סביבה של $z = 0$ למשוואה $f(z) = e^{\frac{1}{z}} \text{Log}(1 + z^3) - \cos(z^2) = 0$ יש אינסוף "פתרונות מקורבים".

(נקודה z_0 נקראת פתרון מקורב אם מתקיים $|f(z_0)| < \epsilon$, עבור דיוק ϵ נתון.)

ה. האם קיימת $f \in \mathcal{O}(Ball_\epsilon(0) \setminus \{0\})$ המקיימת: $|f(z)| \geq C \cdot e^{\frac{1}{|z|}}$ (כאן C הינו קבוע).

5. תהי $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{C}$ פונקציה רציפה ומחזורית, עם מחזור 2π . נגדיר $\mathbb{C} \xrightarrow{g} \partial Ball_1(0)$ על-ידי $g(e^{it}) = h(t)$.

מקדמי פורייה של h מוגדרים להיות $\hat{h}(n) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} h(t) e^{-int} dt$

נגדיר $\mathbb{C} \xrightarrow{f_1} Ball_1(0)$ על-ידי $f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Ball_1(0)} \frac{g(\xi)}{\xi-z} d\xi$ ו $\mathbb{C} \xrightarrow{f_2} \overline{Ball_1(0)} \setminus \mathbb{C}$ על-ידי $f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Ball_1(0)} \frac{g(\xi)}{\xi-z} d\xi$

א. מה הקשר בין מקדמי טור טיילור של f_1 (ב $z = 0$) ומקדמי טור לורן של f_2 (ב $z = 0$) למקדמי פורייה של h ?
 ב. נניח שניתן להרחיב את g לפונקציה אנליטית בטבעת שמכילה את מעגל היחידה.

i. הראו כי ניתן להרחיב את f_1 לפונקציה אנליטית ב $Ball_{1+\epsilon}(0)$ עבור $\epsilon > 0$ קטן.

הראו כי ניתן להרחיב את f_2 לפונקציה אנליטית ב $Ball_{1-\epsilon}(0)$ עבור $\epsilon > 0$ קטן.

ii. הראו כי $h(t) = f_1(e^{it}) + f_2(e^{it})$