חדו"א וקטורי להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2023. תרגיל בית מס' 0.

(מרצים: נ. אדלשטיין, י. דן-כהן, ד. קרנר)

התרגיל הינו תרגיל רענון על חומר הנדרש לקורס שלנו.

התרגיל לא להגשה, אך חשוב לפתור את כולו לפני השיעור הראשון.

0. למדו לכתוב את האותיות α, β, γ, δ, θ, λ, π, ρ, σ, ϕ, ψ.

1. א. יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$ וקטורים ב $\mathbb{R}^3$, שיוצרים זווית 120^0 ואורכם $\|\vec{v}\|=3$, $\|\vec{u}\|=4$. חשבו:
   i. $\|\vec{v}+\vec{u}\|$, (תזכורת: $\vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$, מכפלה פנימית רגילה) ii. $(3\vec{v}+2\vec{u})\cdot(2\vec{v}-2\vec{u})$.

   ב. עבור כל שני וקטורים, $\vec{u}$, $\vec{v}$ ב $\mathbb{R}^2$ הוכיחו: $|\vec{v}+\vec{u}|^2+|\vec{v}-\vec{u}|^2=2\left(|\vec{v}|^2+|\vec{u}|^2\right)$. תנו פירוש גאומטרי.

   ג. חשבו את זוויות המשולש בעל קודקודים $(0,0,5)$, $(1,1,1)$, $(2,-1,3)$.

   ד. הוכיחו: אלכסוני כל מעוין ניצבים.

2. א. מצאו נקודת החיתוך והזווית בין הישרים: $\{2x+3y=1\}$, $\{3x+ay=2\}$. עבור איזה ערך של a הישרים מקבילים?

   ב. מצאו את כל המשיקים לעקום $\{y=x^2\}$ העוברים דרך הנקודה $(-3,8)$.

   ג. חשבו את הזוויות בין העקומות $\{y=\sin(x)\}$, $\{y=\cos(x)\}$ בנקודות החיתוך שלהן.
   (כלומר את הזווית בין המשיקים.)

   ד. מצאו את המרחק (הקצר ביותר) בין נקודה $(0,1,2)$ לישר $\mathbb{R}^3\supset\{(1,2,1)+t(1,1,1)|\ t\in\mathbb{R}\}$.

   ה. עבור אלו ערכים של a הנקודות $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(7,12,a)$ נמצאות על אותו ישר?

   ו. עבור כל שלשה של נקודות קבעו האם עובר דרכה מישור יחיד. אם כן, מצאו את הנורמל שלו והמשוואה שלו.
   i. $(1,0,1)$, $(2,1,2)$, $(0,-1,0)$. ii. $(1,2,3)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$.

3. א. מצאו את כל הנקודות $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ שעבורן הדרגה של המטריצה $\begin{bmatrix}x^2 & y^3 & z^2\\ y & x^2 & z\end{bmatrix}$ שווה לאחד.
   (תזכורת/רמז: לא חייבים לדרג את המטריצה, מספיק לבדוק שכל המינורים 2×2 מתאפסים)

   ב. הוכיחו: כל פולינום $p(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ ניתן להצגה כ- $[x\ y]A_p\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, כאשר A_p מטריצה 2×2 ו $A_p=A_p^t$.

   ג. הוכיחו: $p(x,y)>0$ עבור כל $(0,0)\neq(x,y)\in\mathbb{R}^2$ אמ"מ הערכים העצמיים של A_p הינם מספרים (ממשיים) חיובים.
   הדרכה: צריכים לוודא $[x\ y]\cdot A_p\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}>0$ עבור כל $(0,0)\neq(x,y)\in\mathbb{R}^2$. למדתם כי כל מטריצה סימטרית ניתנת ללכסון אורטוגונלי, $A_p=U\cdot Diag_p\cdot U^t$, $U\cdot U^t=\mathbb{1}$. לכן מספיק לבדוק: $v\cdot Diag_p\cdot v>0$ עבור כל $(0,0)\neq v\in\mathbb{R}^2$.

   ד. האם עבור כל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים $3x^2-7xy+5y^2\geq0$?

4. א. ציירו את הגרפים של הפונקציות הבאות: i. $f(x)=|1-x|+|1+x|$
   ii. $f(x)=x^\alpha$, כאן הבדילו בין המקרים: $\alpha<0$, $\alpha=0$, $0<\alpha<1$, $\alpha=1$, $\alpha>1$.

   ב. ציירו את התחומים הבאים ב $\mathbb{R}^2$: i. $\{|x|+|y|\leq1\}$ ii. $\{|2x-y|+|2y-x|\leq1\}$
   iii. $\{-1\leq xy\leq1,\ -1\leq x-y\leq1\}$ iv. $\{-1\leq xy\leq1,\ -1\leq\frac{x}{y}\leq1\}$

ג. ציירו את העקומות הבאות ב $\mathbb{R}^2$: i. $\{x^2 = y^2\}$ ii. $\{x^2+1 = y^2\}$ iii. $\{x(x-1)(x+1) = 0\}$
iv. $\{(x^2-1)(y^2-1) = 0\}$ v. $\{((x+y)^2-1)((x-y)^2-1) = 0\}$ vi. $\{4(x-2)^2+9(y-3)^2 = 1\}$
vii. $\{|x|^\alpha + |y|^\alpha = 1\}$, $\alpha > 0$. (הדרכה: מספיק לצייר את חלק העקום ברביע הראשון. הציגו את העקום כגרף של פונקציה $y = (1-x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. היעזרו בגרף שציירתם בשאלה 4.א.) מה מקבלים עבור $\alpha = 1$? $\alpha = 2$? $\alpha = 10$?

5. א. האם ניתן להרחיב את תחום הגדרה של הפונקציה ל $\mathbb{R}$ כולו כך שתישאר רציפה? i. $f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$
ii. $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$ iii. $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ iv. $f(x) = (1+\sin(x))^{\cot(2x)}$.

ב. הוכיחו: פונקציה $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \arctan(x)$ הפיכה.
האם הפונקציה ההופכית רציפה/גזירה? (באילו נקודות?)

6. בדקו באילו נקודות הפונקציות הבאות גזירות? גזירות פעמיים? i. $f(x) = |x|^{\frac{7}{3}}$
ii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ iii. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ iv. $f(x) = \arcsin(\cos(x))$.

7. א. חשבו: i. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n-1} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2 \arctan\frac{k}{n}}{n^3}$ iii. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{ln(n+k)-ln(n)}{n}$. (רמז: סכומי רימן)

ב. חשבו: i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x (\arctan(t))^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_{\sin(\sin(x))}^{\sin(x)} e^{t^2} dt}{x^2}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{\tan(x)} t\cdot\sin(at)dt}{x-\sin(x)}$.

8. א. הוכיחו: לכל פונקציה רציפה מתקיים $\int_0^\pi xf(\sin(x))dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))dx$. (רמז: הצבה $t = \pi - x$.)

ב. הוכיחו כי פונקצית Dirichlet, $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, אינה אינטגרבילית באף קטע.

ג. הוכיחו/הפריכו: אם $|f|$ אינטגרבילית ב $[a,b]$ אז גם f אינטגרבילית ומתקיים $|\int_a^b f(x)dx| \geq \int_a^b |f(x)|dx$.

ד. חשבו את אורך העקומות הבאות. i. $\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = t + \sin(t), 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$ ii. $y = a \cdot \cosh\frac{x}{a}$, $x \in [p,q]$
iii. $r = a\cdot\phi$, $0 \leq \phi \leq b$ iv. $\{y = \ln\sin x, \ x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\}$ v. $\{\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$.

<u>שאלות נוספות</u>

9. א. ציירו גרפים של פונקציות הבאות i. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (החלק השלם) ii. $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ iii. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

ב. ציירו את העקומות הבאות ב $\mathbb{R}^2_{xy}$. (העקומות מוגדרות ע"י משוואות שרשומות בקואורדינטות קוטביות r, ϕ.)
i. $\{r = \cos(\phi)\}$ ii. $\{r = |\sin(6\phi)|\}$ iii. $\{r = \phi, \ \phi \in [0,\infty)\}$ iv. $\{r = \cos^2(\phi)\}$.

10. תהי $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. הוכיחו/הפריכו:

א. אם $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$, עבור קבועים $\alpha > 1$, $C > 0$ וכל הנקודות $x, y \in \mathbb{R}$, אז f קבועה.

ב. אם $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ אז עבור כל קבוע a מתקיים: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+a) - f(x)) = 0$. האם $f(x)$ בהכרח חסומה?