חדו"א וקטורי להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2023. תרגיל בית מס' 1.

(מרצים: נ .אדלשטיין, א. חסון, ד. קרנר)

תאריך ההגשה: 12.01.2024. שאלות להגשה: 3.א, 4.א, 4.ג, 4.ה, 5.ב.

1. כיתבו את כל מישורי קואורדינטות ממימד 1,2,3 ב $\mathbb{R}^4$. תארו את כל החיתוכים שלהם.

2. א. הוכיחו: הנקודות (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) ב $\mathbb{R}^2$ נמצאות על ישר אחד אמ"מ $\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}=0$.
(בכמה דרכים שונות תוכלו להוכיח זאת?)

ב. הכלילו את הטענה ל: "N נקודות ב $\mathbb{R}^2$ יושבות על ישר אחד אמ"מ ..."

ג. הכלילו את הטענה ל: "N נקודות ב $\mathbb{R}^n$ יושבות על ישר אחד אמ"מ ..."

ד. נקבע מספרים שונים $\lambda_1,\ldots,\lambda_N\in\mathbb{R}$, כלומר $\lambda_i\neq\lambda_j$ עבור $i\neq j$. בהתאם ניקח נקודות $\{(\lambda_i,\lambda_i^2,\ldots,\lambda_i^n)\}_{i=1,\ldots,N}$ ב $\mathbb{R}^n$. הוכיחו: בין הנקודות האלו אין שלוש על ישר אחד. (רמז: Vandermonde)

ה. נניח שהנקודות (x_1,y_1,z_1), $(x_2.y_2,z_2)$, (x_3,y_3,z_3) ב $\mathbb{R}^3$ לא יושבות על ישר אחד. הוכיחו שמשוואת המישור העובר דרך הנקודות נתונה ע"י: $\det\begin{bmatrix}x_1-x & y_1-y & z_1-z\\ x_2-x & y_2-y & z_2-z\\ x_3-x & y_3-y & z_3-z\end{bmatrix}=0$
(בפרט בדקו שהמשוואה הינה לינארית. מה קורה עבור נקודות על ישר אחד?)

ו. בצורה דומה קבלו תנאי: "N נקודות ב $\mathbb{R}^3$ יושבות על מישור אחד אמ"מ ..."

ז. הקוביה הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$ מוגדרת ע"י $\{(x_1,\ldots,x_n)|\ 0\le x_i\le 1,\ \forall i\}$. (ציירו אותה במקרים $n=1,2,3$.)
הקודקודים של הקוביה הם הנקודות מהצורה: $(x_1,\ldots,x_n)$, כאן כל x_i הינו 0 או 1. כמה קודקודים יש לקוביה?
נסמן ע"י d_n את המרחק הגדול ביותר בין הקודקודים. מצאו את d_n. חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$.
(המסר: למרות שהקוביה "מאוד חסומה", אי אפשר לחסום את המרחקים בה בצורה אחידה ב n)

3. א. יהיו $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$ שלושה וקטורים ב $\mathbb{R}^3$. הראו כי נפח המקבילון הנוצר ע"י $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$ נתון ע"י: $\left|\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})\right|$.

ב. הוכיחו: i. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=-\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{u})$ ii. $\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$
iii. $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$ iv. $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}+(\vec{v}\times\vec{w})\times\vec{u}+(\vec{w}\times\vec{u})\times\vec{v}=\vec{0}$.

4. א. מצאו את הישר העובר דרך הנקודה $(0,1,1)\in\mathbb{R}^3$ והמאונך למישור הנתון ע"י $x-2y+3z=4$.

ב. לכל ערך של קבוע c מצאו את המרחק בין הישרים הנתונים בצורה פרמטרית
$l=\{(0,1,1)+t(1,1,-2)|\ t\in\mathbb{R}\}$, $l'=\{(1,0,c)+t(2,-2,0)|\ t\in\mathbb{R}\}$.
עבור אילו ערכים של c הישרים נחתכים?

ג. מצאו את הזווית בין הישר $l=\{(1,2,3)+t(-1,1,-1)|\ t\in\mathbb{R}\}$ והמישור L העובר דרך הנקודות $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$.

ד. מצאו את הזווית בין המישורים $L=\{(0,2,0)+t(1,2,3)+\tau(1,1,1)|\ t,\tau\in\mathbb{R}\}$, $\tilde{L}=\{(x,y,z)|\ x-y+z=1\}$.

ה. מצאו את הנקודה הסימטרית לנקודה $(2,-3,4)$ ביחס למישור $3x+4y+5z+36=0$.

5. א. בהינתן וקטור $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ ומישור $\{\vec{\mathcal{N}}\cdot(x,y,z)=d\}$, נציג $\vec{v}=\vec{v}_\perp+\vec{v}_{||}$, כאשר $\vec{v}_\perp$ מאונך למישור ו $\vec{v}_{||}$ מקביל למישור. בטאו את $\vec{v}_\perp$, $\vec{v}_{||}$ דרך $\vec{v}$, $\vec{\mathcal{N}}$, d.

ב. הוכיחו: המרחק (הקטן ביותר) מנקודה $(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$ למישור $\{ax+by+cz=d\}\subset\mathbb{R}^3$ נתון ע"י $\frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

ג. הוכיחו: המרחק (הקטן ביותר) בין מישורים $\{ax+by+cz=d_1\}$, $\{ax+by+cz=d_2\}$ נתון ע"י $\frac{|d_1-d_2|}{\|(a,b,c)\|}$.