חדו"א וקטורי להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2023. תרגיל בית מס' 10.

(מרצים: נ .אדלשטיין, א. חסון, ד. קרנר)

לא להגשה

1. א. חשבו את האינטגרלים: i. $\int\limits_{\{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\}} (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$ ii. $\int\limits_{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)} |y|ds$.

ב. יהי $C\subset\mathbb{R}^2$ מוגדר ע"י $r=r(\theta)$ (פרמטריזציה בקוטביות). הוכיחו: $\int\limits_C fdC=\int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} f\cdot\sqrt{(\partial_\theta r)^2+r^2}d\theta$.

ג. עבור אילו ערכים של $s>0$ לספירלה $\{r(\theta)=\frac{1}{1+\theta^s},\ 0\le\theta<\infty\}$ יש אורך סופי?

ד. יהי $C\subset\mathbb{R}^3$ עקום שמוגדר בקוטביות: $\{r=r(\phi),\ \theta=\theta(\phi)|\ \phi\in[\phi_0,\phi_1]\}$, כאן θ- זווית עם ציר $\hat{z}$.

הוכיחו: $\int_C f\cdot dC=\int_{\phi_0}^{\phi_1} f\cdot\sqrt{(\partial_\phi r)^2+r^2(\partial_\phi\theta)^2+r^2 sin^2(\theta)}d\phi$.

2. במקרים הבאים חשבו את $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{C}$.

א. $\vec{F}(\underline{x})=(x_1,x_2^2,\dots,x_n^n)$, $C=\{(sin(t),sin^2(t),\dots,sin^n(t))|\ t\in[0,\pi]\}$.

ב. $\vec{F}=\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$, $C=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}\subset\mathbb{R}^2$, נגד כיוון השעון.

ג. $\vec{F}=\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$, C נתונה בקוטביות ע"י $r(\theta)=\frac{1}{1-sin(\theta)}$ מנקודה $(\sqrt{3},1)$ לנקודה $(-\sqrt{3},1)$

ד. $\int\limits_{\left\{\substack{x^2+y^2+z^2=1,\\ y=-x,\ \ z>0}\right\}} (z^2dx+3y^2dy-x^2dz)$ כיוון העקומה מתאים לתנועה מ $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0)$ ל $(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$.

3. א. נקבע עקום עם פרמטריזציה $C\subset\mathbb{R}^n \overset{\underline{x}(t)}{\leftarrow} [a,b]$, כאן $\underline{x}(t)$ פונקציה C^1. נניח ש $\vec{F}=grad(f)$, עבור f פונקציה C^1 בסביבה של C. הוכיחו נוסחת Newton-Leibniz: $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{C}=f(\underline{x}(b))-f(\underline{x}(a))$.

ב. חשבו $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{C}$ עבור $\vec{F}=(yz,xz,xy)$ ו $C=\{y=e^{x^2},\ z=sin(x^3)|\ x\in[0,1]\}$.

ג. יהי $n\in\mathbb{Z}$. מצאו מסילה γ סגורה (מכוונת) שלא עוברת דרך הראשית, שעבורה $\oint_\gamma \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=2\pi n$.

ד. הוכיחו/הפריכו: אם שדה וקטורי $\vec{F}$ לא רציף ב $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ אז $\oint_{||\underline{x}||=\epsilon}\vec{F}d\vec{C}\neq 0$.

ה. תהי $\mathbb{R}_{>0}\overset{g}{\to}\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו $C\subset\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ מסילה סגורה וחלקה למקוטעין.

הוכיחו: $\oint_C g(x^2+y^2)\big(xdx+ydy\big)=0$.

4. א. החליפו את סדר האינטגרציה: i. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x} f(x,y)dx+\int\limits_1^5 dx\int\limits_0^{\sqrt{5-x}} f(x,y)dx$ ii. $\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{arcsin(y)}^{\pi-arcsin(y)} f(x,y)dx$.

ב. חשבו את האינטגרלים: i. $\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{-\sqrt[4]{1-y^4}}^{\sqrt[4]{1-y^4}} ye^{x^2}dx$ ii. $\int\limits_1^e dx\int\limits_0^{ln(x)}\frac{dy}{e^y+1}$ iii. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{arccos(y)}\frac{dx}{sin(x)+10}$

ג. החליפו את סדר האינטגרציה כך שתתאפשר אינטגרציה פנימית ובסוף יישאר אינטגרל במשתנה אחד:

i. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{\sqrt[3]{x}} dy\int\limits_{y^4}^{\sqrt[4]{y}} f(z)dz$ ii. $\int\limits_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx\int\limits_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}} dy\int\limits_{\frac{\frac{\pi}{2}-x^2-y^2}{2}}^{cos(x^2+y^2)} f(z)dz$.

5. חשבו את האינטגרלים: i. $\iint\limits_{\mathscr{D}}(x^2+y^2)dxdydz$, כאן $\mathscr{D}\subset\mathbb{R}^3$ חסום ע"י $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

ii. $\iint\limits_{\mathscr{D}} ydxdydz$, $\mathscr{D}=\{\underline{x}\mid\ |x|\le z,\ 0\le z\le 1,\ x^2+y^2+z^2\le 4\}$.