חדו"א וקטורי להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2023. תרגיל בית מס' 11.

(מרצים: נ .אדלשטיין, א. חסון, ד. קרנר)

1. נתבונן בפירמידה $P := \{\underline{x} |\ 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le 1\} \subset \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי לכל פונקציה רציפה $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1$ מתקיים: $\int_P \prod_{i=1}^n f(x_i)dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{n!}(\int_0^1 f(t)dt)^n$. היעזרו בנוסחה זאת כדי לחשב את נפח הפירמידה.

2. מצאו את השטחים של התחומים החסומים ע"י עקומות הבאות
   i. $\{(x,y) |\ (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)\}$
   ii. $\{(x,y) |\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\}$ (רמז: איך אפשר להעביר את העקום למעגל?)
   iii. $\{(x,y) |\ \sqrt{x^2+y^2} = |sin(n \cdot arctan\frac{y}{x})|\}$, $n \in \mathbb{N}$ (רמז: לוודא בקוטביות כי התחום הוא פרח עם $2n$ עלי כותרת)

3. א. הוכיחו שנפח נשמר תחת סיבובים, שיקופים והזזות. כלומר, אם $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x} + \vec{v}$, כאשר $A \cdot A^t = \mathbb{I}$, אז (עבור כל קבוצה בעלת נפח): $vol_n(f(S)) = vol_n(S)$.

   ב. חשבו את הנפח של הגופים הבאים. תנסו לחשב בדרכים שונות.
   i. $\left\{(x,y,z) \middle|\ \begin{matrix} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1, \\ 0 \le x < y,\ z \le 0 \end{matrix} \right\}$
   ii. $\left\{(x,y,z) \middle|\ \begin{matrix} x^2+y^2+z^2 \le 1, \\ (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \le \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}$
   iii. $\{(x,y,z) |\ x^2+y^2 \le R^2,\ |z| \le xy\}$
   iv. $\{(x,y,z) |\ x^2+y^2 \le 1,\ z^2+y^2 < 1\}$
   v. $\{(x,y,z) |\ |x+2y+3z| + |2x+3y+z| + |3x+y+2z| \le 1\}$
   vi. הגוף החסום ע"י המשטח משאלה 3.iii. של ת"ב 2.

4. א. חשבו את האינטגרלים הבאים:
   i. $\iint_{\left\{\substack{1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x \le y \le x\sqrt{3}}\right\}} arctan\frac{y}{x} dxdy$
   ii. $\iiint_{\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\}} \sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} dxdydz$
   iii. $\int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{sin(\sqrt{x^2+y^2})dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (האם פונקציה $\frac{sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$ רציפה וחסומה בתחום האינטגרציה?)
   iv. $\iint_{\left\{\substack{x^2 \le y \le 2x^2, \\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}}\right\}} x|y|dxdy$
   v. $\iiint_{\left\{\substack{0 \le z \le 2 \\ \frac{x}{3} \le z \le \frac{x}{2} \\ \frac{y^2}{4} \le z \le y^2}\right\}} zye^{x+y^2} dxdydz$
   vi. $\iiint_{\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}} \le 1} xyzdxdydz$.

5. נחשב את נפח הכדור ה-n מימדי, $Ball_R^{(n)}(0) \subset \mathbb{R}^n$. נגדיר היטל $Ball_R^{(n)}(0) \xrightarrow{\pi} Ball_R^{(2)}(0)$ ע"י $\pi(\underline{x}) = (x_{n-1}, x_n)$.

   א. עבור כל $(x_{n-1}, x_n) \in Ball_R^{(2)}(0)$ בדקו: $\pi^{-1}(x_{n-1}, x_n) = Ball^{n-2}_{\sqrt{R^2-x_{n-1}^2-x_n^2}}(0) \times \{x_{n-1}\} \times \{x_n\}$.

   ב. הוכיחו (בעזרת Fubini): $vol_n Ball_R^{(n)}(0) = vol_{n-2} Ball_R^{(n-2)}(0) \cdot 2\pi \int_0^R (1-(\frac{r}{R})^2)^{\frac{n-2}{2}} rdr$.

   ג. קבלו את הנוסחה הרקורסיבית: $vol_n Ball_R^{(n)}(0) = \frac{2\pi R^2}{n} \cdot vol_{n-2} Ball_R^{(n-2)}(0)$.

   ד. קבלו נוסחאות מפורשות עבור $vol_{2k} Ball_R^{(2k)}(0)$ ו $vol_{2k+1} Ball_R^{(2k+1)}(0)$.

   ה. חשבו את $\lim_{n\to\infty} vol_n Ball_R^{(n)}(0)$ ואת $\lim_{n\to\infty} \frac{vol_n Ball_R^{(n)}(0) - vol_n Ball_{R-\epsilon}^{(n)}(0)}{vol_n Ball_R^{(n)}(0)}$, עבור R ו $\epsilon > 0$ קבועים.