חדו"א וקטורי להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2023. תרגיל בית מס' 12.

(מרצים: נ .אדלשטיין, א. חסון, ד. קרנר)

תאריך ההגשה: 15.03.2024 שאלות להגשה. מתרגיל 11: 2.ii, 3.ii.ב 4.א.iv. מתרגיל 12: 1.ב, 1.ג.i, 4.i.

1. א. מצאו עקומה סגורה וחלקה למקוטעין C עבורה האינטגרל $\oint\limits_C (\frac{x^2y}{4}+\frac{y^3}{3})dx + xdy$ מקבל את הערך הגדול ביותר.

ב. יהי $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ תחום פתוח וחסום כך ש $\partial\mathscr{D}$ הינו עקום בעל אורינטציה חיובית.
הוכיחו: $vol_2(\mathscr{D}) = \oint_{\partial\mathscr{D}} xdy = \oint_{\partial\mathscr{D}}(-y)dx = \oint_{\partial\mathscr{D}} \frac{xdy-ydx}{2}$.

ג. השתמשו בנוסחה זו כדי לחשב את השטח החסום ע"י העקומות:
i. $\{|\frac{x}{a}|^{\frac{2}{p}} + |\frac{y}{b}|^{\frac{2}{p}} = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ עבור $p = 1, 2, 3$
ii. $\{(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\} \subset \mathbb{R}^2$,
iii. $\left\{\vec{r}(t) = (t^2-1)\hat{x} + t(t^2-1)\hat{y}, \quad t \in [-1,1]\right\}$. בדקו גם שהעקום הינו חלק מהעקום $\{y^2 = x^2+x^3\}$.

2. במקרים הבאים המשטח הנתון בצורה פרמטרית. קבלו את המשוואה שלו, ציירו אותו, חשבו את הנורמל, $\partial_s\vec{r} \times \partial_t\vec{r}$.

א. $\vec{r} = \{(x, y, f(x,y))\}$, עבור $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, C^1. (הנורמל כלפי מעלה)

ב. $\vec{r} = (R\cdot sin(\theta)cos(\phi), R\cdot sin(\theta)sin(\phi), R\cdot cos(\theta))$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0,\pi]$, $R > r$, (הנורמל חיצוני).

ג. $\vec{r}(\phi_1,\phi_2) = \big((R + rsin(\phi_1))cos(\phi_2), (R + rsin(\phi_1))sin(\phi_2), rcos(\phi_1)\big)$, $\quad \phi_1,\phi_2 \in [0, 2\pi]$.
(הנורמל חיצוני) (כאן $||\partial_{\phi_1}\vec{r} \times \partial_{\phi_2}\vec{r}|| = r(R + rsin(\phi_1))$.)

3. א. יהי $S = \{z = z(x,y), \ (x,y) \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2\}$ גרף של פונקציה, עם נורמל פונה כלפי מעלה, $\mathcal{N}_z > 0$. הוכיחו:

$$\iint\limits_S f dS = \iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1 + (\tfrac{\partial z}{\partial x})^2 + (\tfrac{\partial z}{\partial y})^2} \cdot dxdy, \qquad \iint\limits_S \vec{F}d\vec{S} = \iint\limits_{\mathscr{D}} det\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ 1 & 0 & \partial_x z \\ 0 & 1 & \partial_y z\end{bmatrix} dxdy.$$

ב. ניקח חלק של גליל, $S = \{r = R, \ (\phi, z) \in \mathscr{D}\}$, עם נורמל חיצוני. הוכיחו: $\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S} = \iint\limits_{\mathscr{D}} (F_x\cdot x + F_y \cdot y)d\phi dz$.

ג. יהי $S = \left\{(r\cdot cos(\phi), r\cdot sin(\phi), z(r,\phi)) \middle| \ (r,\phi) \in \mathscr{D}\right\}$ משטח נתון בקואורדינטות גליליות, ותהי $S \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו: $\iint\limits_S fdS = \iint\limits_{\mathscr{D}} f(x(r,\phi), y(r,\phi), z(r,\phi))\sqrt{r^2 + (\frac{\partial z}{\partial \phi})^2 + r^2(\frac{\partial z}{\partial r})^2}dr\cdot d\phi$.

ד. קבלו נוסחאות עבור $\iint\limits_S fdS$, $\iint\limits_{\vec{S}} \vec{F}d\vec{S}$ כאשר S הוא חלק של ספירה, $S \subseteq S^2 = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^3$.
עבור שדה $\vec{F} = f\cdot\vec{r}$ והנורמל כלפי חוץ הוכיחו: $\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S} = \iint\limits_{\mathscr{D}} f\cdot r^3 sin(\theta)d\theta d\phi$.

ה. עבור טורוס $S = \left\{\vec{r} = \vec{r}(\phi_1,\phi_2) \middle| \ (\phi_1,\phi_2) \in \mathscr{D}\right\}$ (שאלה 2 .ג) קבלו נוסחה:

$$\iint\limits_S fdS = \iint\limits_{\mathscr{D}} f\big(x(\phi_1,\phi_2), y(\phi_1,\phi_2), z(\phi_1,\phi_2)\big)\big(R + r\cdot sin(\phi_1)\big)r\cdot d\phi_1 d\phi_2.$$

4. חשבו את שטח המשטח i. $\left\{\begin{matrix} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\end{matrix}\right\}$ ii. $\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, \ 0 < b \leq a\end{matrix}\right\}$

iii. $\{(x,y,z)| \ x^2+y^2 = R^2, \ x < z \leq 2x\}$ iv. טורוס משאלה 2 .ג.