חדו"א וקטורי להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2023. תרגיל בית מס' 13.

(מרצים: נ .אדלשטיין, א. חסון, ד. קרנר)

1א. חשבו $\underset{S}{\oiint}(x^2+y^2)dS$ על המעטפת S של הגוף $\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$.

ב. חשבו את המסה של כליפה $\{x^2+y^2+z^2=1,\ -\frac{1}{2}\le z\le\frac{\sqrt{3}}{2},\ x\le y\}$ בעלת צפיפות משטחית בכל נקודה השווה למרחק מהנקודה למישור xy.

ג. חשבו את שטף השדה $\vec{F}=(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$ דרך המשטח $\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$, עם נורמל חיצוני.
שימו לב, השדה לא מוגדר כאשר $xyz=0$. חשבו את השטף בהנחה ש $|x|>\epsilon_x, |y|>\epsilon_y, |z|>\epsilon_z$ והשאיפו $\epsilon_x,\epsilon_y,\epsilon_z\to 0$.

ד. יהי $S\subset\mathbb{R}^3$ משטח חלק, כך שבכל נקודה שלו כל רכיב של הנורמל לא מתאפס. יהיו π_{xy}, π_{yz}, π_{xz} היטלים על מישורי קואורדינטות. נסמן $sign(\mathcal{N}_i)$= סימן של הרכיב של הנורמל. קבלו נוסחה:

$$\int_{\vec{S}}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_{\pi_{xy}(S)}F_z\cdot sign(\mathcal{N}_z)dxdy+\int_{\pi_{yz}(S)}F_x\cdot sign(\mathcal{N}_x)dydz+\int_{\pi_{xz}(S)}F_y\cdot sign(\mathcal{N}_y)dxdz.$$

2. חשבו את שטף השדה דרך המשטח בדרכים שונות. (הנורמל חיצוני)

א. $\vec{F}=ln(y^2+z^2+1)\hat{x}+\frac{e^x}{z^2+1}\hat{y}+(x-y-1)\hat{z}$, $S=\{0\le z=\sqrt{x^2+y^2}\le 1\}\subset\mathbb{R}^3$.

ב. $\iint_{\vec{S}}\frac{ayz\cdot dydz+bxz\cdot dxdz+cxy\cdot dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^n}$, $S=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=R^2\}\subset\mathbb{R}^3$.

ג. $\vec{F}=(3x-2y+z)\hat{x}+(2x+3y-z)\hat{y}+(x-3y+z)\hat{z}$,
$S=\Big\{|3x-2y+z|+|2x+3y-z|+|x-3y+z|=1\Big\}\subset\mathbb{R}^3$.

ד. $rot(\vec{F})$, עבור $\vec{F}=(0,x+1,0)$, $S=\{x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge-\sqrt{2}\}$.

ה. $\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^3}$, והמשטח הנו שפה של הגוף $\Big\{|x|^3+|y|^4+|z+\frac{1}{4}|^2\le 4,\ x^2+y^2-1\le z\Big\}$, עם נורמל פנימי.

3. יהי $V\subset\mathbb{R}^3$ גוף חסום שהשפה שלו, $\partial V=S$, הינו משטח חלק מכוון. תהיינה $V\overset{f,g,h}{\to}\mathbb{R}$ פונקציות C^2.

א. תהי $(\mathcal{N},\vec{v})$ זווית בין הנורמל (החיצוני) לבין וקטור קבוע. חשבו $\int_S cos(\mathcal{N},\vec{v})dS$.

ב. קבלו זהויות גרין:

i. $\oiint_{\partial V}f\nabla g\cdot d^2\vec{S}=\oiint_{\partial V}f\partial_{\mathcal{N}}g\cdot d^2S=\iiint_V\Big((\nabla f)\cdot(\nabla g)+f\Delta g\Big)d^3V$.

ii. $\oiint_{\partial V}g\cdot\Big(f\cdot\partial_{\mathcal{N}}h-h\cdot\partial_{\mathcal{N}}f\Big)\cdot d^2S=\iiint_V\Big(f\nabla(g\nabla h)-h\nabla(g\nabla(f))\Big)d^3V$.

ג. f נקראת *הרמונית* אם היא המקיימת $\Delta(f)=0$ ב V. הסיקו: אם f הרמונית אז היא נקבעת בצורה יחידה ע"י $f|_{\partial V}$.
(רמז: הציבו $h=1$, $g=f$, כאשר f מתאפסת על ∂V)

4א. יהיו $\mathbb{R}^3\overset{\vec{F},\vec{G}}{\to}\mathbb{R}^3$ ו $\mathbb{R}^3\overset{f}{\to}\mathbb{R}$, כולם גזירים ברציפות פעמיים. הוכיחו:

i. $rot(\vec{F}\pm\vec{G})=rot(\vec{F})\pm rot(\vec{G})$
ii. $div(rot(\vec{F}))=0$
iii. $rot(grad(f))=0$
iv. אם $\vec{F}=f\cdot\vec{r}$ אז $div(\vec{F})=\vec{r}\cdot grad(f)+3f$
v. $rot(f\cdot\vec{F})=grad(f)\times\vec{F}+f\cdot rot(\vec{F})$
vi. $grad(f(\vec{F}))=grad(f)|_{\vec{F}}\cdot D_{\vec{F}}$
vii. $div(\vec{F}\times\vec{G})=rot(\vec{F})\cdot\vec{G}-\vec{F}\cdot rot(\vec{G})$.

ב. יהי S חצי-טורוס המתקבל ע"י סיבוב של $\{(y-2)^2+z^2=1,\ x=0\}$ מסביב לציר $\hat{z}$ ב 180^o, נגד כיוון השעון.
קבעו את כיוון של השפה היחסית של S המתאים לנורמל החיצוני.