חדו"א וקטורי להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2023. תרגיל בית מס' 14.

(מרצים: נ .אדלשטיין, א. חסון, ד. קרנר)

תאריך ההגשה: 27.03.2024   שאלות להגשה: תרגיל 13: 1.א, 1.ב, 2.א, 2.ה. תרגיל 14: 1.ב, 1.ג.

1א.תהי $\vec{C}=\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=2Rx,\\ x^2+y^2=2rx,\ z>0\end{array}\right\}$, כאשר $0<r<R$, וכיוון המסילה חיובי אם מסתכלים מנקודה $(0,0,+\infty)$.

חשבו את צירקולצית שדה $\vec{F}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$ לאורך $\vec{C}$.

ב.חשבו את צירקולצית השדה $\vec{F}=(z,x,y)$ לאורך העקום $\left\{\begin{array}{l} z=x^2-y^2\\ x^2+y^2=1\end{array}\right\}$ נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מנקודה $(0,0,+\infty)$.

ג.חשבו את העבודה של שדה $\vec{F}=(y-z,z-x,x-y)$ לאורך העקום $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=R^2,\ R>0\\ x\cdot sin(\alpha)+y\cdot sin(\beta)+z\cdot sin(\gamma)=0\end{array}\right\}$, המכוון נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מנקודה $(+\infty,0,0)$. (כאן $0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$ קבועים.)

ד.עבור עקומה $C=\{x^{10}+y^{100}+z^{1000}=2020,\ x-y+z=0\}$ בחרו כיוון וחשבו $\oint\limits_C \frac{ydz-zdy}{y^2+z^2}$.

ה.חשבו $\iint_{\vec{S}} rot\frac{cos(x^2)\hat{z}}{(x^2+y^2+z^2)^8}\cdot d\vec{S}$ עבור $S=\{x^4+y^6+z^8=1,\ z\geq -\frac{1}{2}\}\subset\mathbb{R}^3$, עם נורמל חיצוני.

2א.תהי $\mathbb{R}^3\xrightarrow{f}\mathbb{R}$, C^1. נניח שמתקיים: $\nabla(f)\neq 0$ בכל נקודה של משטח $S=\{f(x,y,z)=0\}$. נניח גם ש S הינו משטח קשיר מסילתית וחסום. הוכיחו/הפריכו: $\iint\limits_S \nabla(f)\cdot d\vec{S}\neq 0$.

ב.יהי $\vec{F}$ שדה C^1 בסביבה של $p\in\mathbb{R}^3$. הסיקו ממשפט גאוס: $div(\vec{F})|_p=\lim\limits_{\epsilon\to 0}\frac{\oiint_{\partial Ball_\epsilon(p)}\vec{F}d\vec{S}}{vol_3(Ball_\epsilon(p))}$.

בפרט, אם השדה לא נוצר ולא "נעלם" ב p אז $div(\vec{F})|_p=0$.

ג.יהי $\vec{F}$ שדה C^1 בסביבה של $p\in\mathbb{R}^3$ ויהי S משטח חלק המכיל את p. הסיקו ממשפט סטוקס:

$rot(\vec{F})\cdot\hat{\mathcal{N}}_S|_p=\lim\limits_{\epsilon\to 0}\frac{\oint_{\partial(Ball_\epsilon(p)\cap S)}\vec{F}d\vec{C}}{vol_2(Ball_\epsilon(p)\cap S)}$. בפרט, אם קווי השדה לא "מסתובבים" ליד p אז $rot(\vec{F})\cdot\hat{\mathcal{N}}_S|_p=0$.

3.* קבלו בעזרת קואורדינטות מרוכבות, $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, את ההצגות:

i. $\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{dz}{z}-\frac{d\bar{z}}{\bar{z}}\right)$ ii. $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{z}+\frac{d\bar{z}}{\bar{z}}\right)$.   (המשך בסמסטר הבא ...)