חדו"א וקטורי להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2023. תרגיל בית מס' 3.

(מרצים: נ. אדלשטיין, א. חסון, ד. קרנר)

תאריך ההגשה: 26.01.2024. שאלות להגשה: 1.א, 2.א, 4.א.

1. א. הוכיחו: פונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x} : & x\neq 0\\ 0 : & x=0\end{cases}$ רציפה לאורך כל ישר דרך הראשית, אך לא רציפה בראשית.
האם אפשר לזהות את אי-רציפות של f בעזרת קווי רמה?

ב. הוכיחו: פונקציה $\mathbb{R}^n \supseteq \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ רציפה אמ"מ כל הרכיבים שלה, $\underline{f}=(f_1,\dots,f_m)$, רציפים.

ג. הוכיחו: אם $\mathbb{R}^n \supseteq \mathscr{D} \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}^1$ פונקציות רציפות אז גם $f\pm g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ רציפות (בתחום הגדרתן).

2. א. בדקו האם הגבולות קיימים. (ואם כן - חשבו אותם)
i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(x^2-y^2)}{|x|+|y|}$ ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} tan(\frac{xy^2}{x^2+y^2})$ iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ iv. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^4+y^4+z^4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

ב. הוכיחו: אם קיים הגבול $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x})$ אז הוא יחיד.

ג. (כלל הסנדוויץ') נניח שפונקציות $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f,g,h} \mathbb{R}^1$ מקיימות $f(\underline{x})\le g(\underline{x})\le h(\underline{x})$ ליד נקודה $\underline{x}_0\in\mathbb{R}^n$.
נניח שבנוסף מתקיים: $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x})=\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} h(\underline{x})$. הוכיחו: $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} g(\underline{x})=\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} h(\underline{x})$.

ד. תהי $f(x,y)=\sqrt{y^2-4}\cdot ln(5-x^2-y^2)$. שרטטו את תחום ההגדרה. שרטט את קו רמה בגובה 0. באילו נקודות הפונקציה רציפה?
בדקו את קיום/חשבו את הגבולות הבאים: i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-2)} f(x,y)$ ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\sqrt{5})} f(x,y)$ iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$.

3. עבור קבוצות הבאות מצאו את הפנים/הסגור/השפה. קבעו האם הקבוצות פתוחות/סגורות/קומפקטיות? (נמקו היטב בסעיפים iii. iv.)
i. $\begin{Bmatrix} x^2-3y^2+7z^2=4\\ x^2+y^2+z^2\le 10\end{Bmatrix}\subset\mathbb{R}^3$ ii. $\begin{Bmatrix} |y|+|z|\le 1\\ x^2+y^2>2\end{Bmatrix}\subset\mathbb{R}^3$ iii. $S^{n-1}:=\{\underline{x}|\ ||\underline{x}||=1\}\subset\mathbb{R}^n$ iv. $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\subset\mathbb{R}^n$.

4. הוכיחו/הפריכו:

א. כל איחוד (סופי או אינסופי) של קבוצות פתוחות/סגורות/קומפקטיות הינו פתוח/סגור/קומפקטי.

ב. כל חיתוך (סופי או אינסופי) של קבוצות פתוחות/סגורות/קומפקטיות הינו פתוח/סגור/קומפקטי.

ג. אם $X\subset\mathbb{R}^n$, $Y\subset\mathbb{R}^m$ קבוצות פתוחות/סגורות/קומפקטיות, אז הקבוצה $X\times Y\subset\mathbb{R}^{n+m}$ פתוחה/סגורה/קומפקטית.

ד. אם הפונקציה $\mathbb{R}^n \supseteq \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ רציפה אז הגרף שלה, $\Gamma_f\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, קבוצה סגורה.

ה. אם הפונקציה $\mathbb{R}^n \supseteq \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ רציפה ו $\mathscr{D}_f$ קבוצה פתוחה/סגורה, אז התמונה, $f(\mathscr{D}_f)\subseteq\mathbb{R}^m$, קבוצה פתוחה/סגורה.

5. א. הוכיחו שפונקצית מרחק בין שתי נקודות, $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \xrightarrow{dist} \mathbb{R}$, $dist(\underline{x},\underline{y}):=||\underline{x}-\underline{y}||$, הינה רציפה.

ב. נגדיר מרחק בין נקודה $\underline{x}_0\in\mathbb{R}^n$ לבין קבוצה $S\subset\mathbb{R}^n$ ע"י $dist(\underline{x}_0,S):=inf\{dist(\underline{x}_0,\underline{x})|\ \underline{x}\in S\}$.
חשבו את המרחק בין $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ לבין הקבוצות i. $\{xy=1\}\subset\mathbb{R}^2$ ii. $Ball_1(1,0)\subset\mathbb{R}^2$ iii. $Ball_1(-2,-3)\subset\mathbb{R}^2$.

ג. הוכיחו: אם $S\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה, אז המרחק $dist(\underline{x}_0,S)$ מתקבל עבור נקודה של S. (כלומר, קיימת נקודה $s\in S$ כך ש: $dist(\underline{x}_0,s)=dist(\underline{x}_0,S)$.) מה יכול לקרות עבור קבוצות לא סגורות?

ד. נגדיר מרחק בין קבוצות $S_1,S_2\subset\mathbb{R}^n$ ע"י $dist(S_1,S_2):=inf\{dist(x_1,x_2)|\ x_1\in S_1,\ s_2\in S_2\}$. חשבו:
i. $dist\big(Ball_1(-5,-7),Ball_2(8,9)\big)$ ii. $dist\big(Ball_1(-1,0),Ball_1(1,0)\big)$ iii. $dist\big(\{xy=1\},\{xy=-1\}\big)$.
iv. הוכיחו: אם S_1,S_2 קבוצות קומפקטיות אז המרחק מתקבל עבור נקודות של S_1,S_2. האם מספיק להניח ש S_1,S_2 סגורות?