



# חזו"א וקטורי להנדסת השמל 201.1.9631

סתיו 2023. תרגיל בית מס' 6.  
(מרצים: נ. אדלשטיין, א. חסון, ד. קרנר)  
לא להגשה

1. א. מצאו את משוואת מישור המשיק לגרף של פונקציה  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot A \cdot \underline{x}^t$ , כאן  $A^t = A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ .  
ב. תהי  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  דיפרנציאבילית. עבור כל ישר הנמצא בתוך המישור המשיק לגרף של  $f$  בנקודה  $\underline{x}_0$ , נמדוד את השיפוע. (הזווית עם מישור-תחום ההגדרה  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ). מצאו את הזווית הגדולה ביותר.

2. תזכורת: קבוצה  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  נקראת קמורה אם עבור כל שתי נקודות  $\underline{x}, \underline{y} \in S$  מתקיים:  $[\underline{x}, \underline{y}] \subseteq S$  (הקטע הישר מ  $\underline{x}$  ל  $\underline{y}$ ).

א. אילו מהקבוצות הבאות קמורות? i.  $\{x^2 - y^2 \leq 1, |x| + |y| \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$ . ii.  $\{z - x^2 - y^2 > 10, (z - 5)^2 + x^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ .  
iii.  $\{|x| + |y| + |z| < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ . iv.  $Ball_r(\underline{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ . v.  $\overline{Ball_r(\underline{x}_0)} \subset \mathbb{R}^n$ . vi.  $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}^n$ .

ב. הוכיחו/הפריכו:

i. איחוד סופי של קבוצות קמורות הינו קמור. ii. חיתוך כלשהו של קבוצות קמורות הינו קמור.  
iii. קשירות מסילתית+קומפקטיות גורר קמירות. iv. המשלים של קבוצה חסומה (ולא ריקה) בהכרח לא קמור.

3. פונקציה  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \supseteq \mathcal{D}_f$  נקראת בלתי תלויה ב  $y$  אם קיימת  $g(x)$  כך ש  $f(x, y) = g(x)$ , עבור כל  $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ .

א. נניח ש  $f$  דיפרנציאבילית בקבוצה קמורה  $\mathcal{D}_f$  ומתקיים  $\partial_y f = 0$ . הוכיחו:  $f$  בלתי תלויה ב  $y$ .  
ב. תנו דוגמא של  $\mathcal{D}_f$  קשירה מסילתית אך לא קמורה, כך ש  $\partial_y f = 0$  על  $\mathcal{D}_f$ , אבל  $f$  לא בלתי תלויה ב  $y$ .

4. א. ניקח קואורדינטות קוטביות  $(r, \phi, \theta)$  ב  $\mathbb{R}^3$ . בטאו את  $\partial_{xx}^2 f, \partial_{xy}^2 f, \dots$  דרך  $\partial_{r\phi}^2 f, \partial_{r\theta}^2 f, \partial_{\phi\theta}^2 f, \dots$ .  
ב. נגדיר את ה Laplacian ע"י  $\Delta(f) = \partial_{xx}^2 f + \partial_{yy}^2 f$ . קבלו את הביטוי עבור  $\Delta(f)$  בקואורדינטות קוטביות ב  $\mathbb{R}^2$ .  
ג. נתונה משוואה  $\sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ , כאן  $\{a_i\}$  קבועים. מצאו החלפת משתנים  $\underline{x} \leftrightarrow \underline{y}$  שמעבירה את המשוואה ל:  $\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$ .

5. א. האם במקרים הבאים מתקיים  $\partial_{xy}^2 f|_{(0,0)} = \partial_{yx}^2 f|_{(0,0)}$ ?  
i.  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & x \cdot y \neq 0 \\ 0, & x \cdot y = 0 \end{cases}$   
ii.  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ב. רשמו את פיתוח טיילור עד סדר שלישי בנקודה  $(0, 0)$ . (מותר להשתמש בטורי טיילור הידועים במשתנה אחד)

i.  $\ln(1+x) \cdot \cos(y)$ . ii.  $\arctan(\frac{x+y}{1+xy})$ . iii.  $\frac{\sin(x) - \sin(y^2)}{e^x + e^y}$ .

ג. יהיו  $P(\underline{x}), Q(\underline{x})$  פולינומים ממעלה  $k$ , ב  $n$  משתנים. נניח ש  $\lim_{|\underline{x}| \rightarrow 0} \frac{P(\underline{x}) - Q(\underline{x})}{|\underline{x}|^k} = 0$ . הוכיחו:  $P(\underline{x}) = Q(\underline{x})$ .

ד. תהי  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים ברציפות. נניח ש  $\lim_{|\underline{x}| \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}) - P(\underline{x})}{|\underline{x}|^2} = 0$ , עבור פולינום ממעלה 2.

הוכיחו:  $P$  בהכרח הפולינום טיילור של  $f$ .

6. במקרים הבאים מצאו וסווגו את כל נקודות הקיצון: i.  $f(x, y) = e^{\sin(x)\sin(y)}$

ii.  $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ . iii. כאן  $f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot A \cdot \underline{x}^t$ ,  $A = A^t \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$