חדו"א וקטורי להנדסת חשמל 201.1.9631

סתיו 2023. תרגיל בית מס' 9.

(מרצים: נ .אדלשטיין, א. חסון, ד. קרנר)

תאריך ההגשה: 26.02.2024. שאלות להגשה: 1.א.iii. 1.ב. 2.ד. 2.ה.

1. א. במקרים הבאים מצאו את ה min/max המקומיים והמוחלטים. כל פעם הסבירו למה ה min/max המוחלט קיים.

i. $f(x,y) = x^p y^q$, $\mathscr{D} = \{(x,y) |\ |x|^a + |y|^a \leq 1\}$, $a > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$.

ii. $f(x,y) = \Big(x^2 + 2(x-y)^2 + 3(x+y)^2\Big)^4 \Big(x^2+y^2\Big)^3$, $\mathscr{D} = \{(x,y) |\ x^2+y^2 = 1\}$.

iii. $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$, $\mathscr{D}_f = \{(x,y,z) |\ |z| \leq 1,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

iv. $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 - z^3$, $\mathscr{D} = \{(x,y,z) |\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

v. $f(x,y) = \frac{x^2+6xy+3y^2}{x^2-xy+y^2}$, $\mathscr{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

ב. הוכיחו את אי-שיוויון הממוצעים (חשבוני/הנדסי/הרמוני): $\frac{\sum x_i}{n} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$, עבור $\{x_i > 0\}_i$. מתי מתקיים השיוויון? (הדרכה: מצאו את $max(\prod x_i)$ תחת האילוץ $\sum x_i = c$. עבור הצד השני הציבו $y_i = \frac{1}{x_i}$.)

ג. באותה דרך קבלו את האי-שיוויון בין $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}$ ל $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$, כאן $\{x_i > 0\}$, $\{\alpha_i > 0\}$, $\{\beta_i > 0\}$.

2. (בכל סעיף הסבירו למה ה min/max המוחלטים קיימים)

א. מצאו את המרחק (הקטן ביותר) בין העקומות: $\{y = x^2 + c,\ z = 0\}$, $\{z = ax,\ y = 0\}$ ב $\mathbb{R}^3$.

ב. מצאו את המרחק הקטן/הגדול ביותר בין נקודה $0 \in \mathbb{R}^n$ לקבוצה $\{\sum_{i=1}^n |x_i|^a = 1\} \subset \mathbb{R}^n$, $a > 0$.

ג. מצאו את נקודות הקבוצה $\{\prod_{i=1}^n |x_i|^{a_i} = 1\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{a_i > 0\}_i$ הקרובות ביותר ל $0 \in \mathbb{R}^n$.

ד. מצאו את השטח המינימלי של אליפסה $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ אשר מכילה את (1,3) כנקודת שפה. האם קיימת אליפסה כנ"ל בעלת שטח מקסימלי?

ה. בין כל התיבות החסומות במשטח $\{x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ ובעלות פאות מקבילות למישורי קואורדינטות מצאו את התיבה בעלת נפח מרבי.

3. נקבע מטריצה סימטרית $A = A^t \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. נגדיר פונקציה $f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot A \cdot \underline{x}^t$.

א. הראו כי f מקבלת את מין/מקס המוחלטים על $S^{n-1} = \{\underline{x} |\ |\underline{x}| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$

ב. הראו כי בכל נקודת הקיצון מתקיים: $A \cdot \underline{x}^t \sim \underline{x}^t$ (תלות לינארית של וקטורים). הסיקו: ל A יש לפחות וקטור עצמי (ממשי) אחד. נסמנו $\vec{v}_1$.

ג.* בדקו כי נקודת קיצון של $f(\underline{x})$ תחת אילוצים $|\underline{x}| = 1$, $\underline{x} \cdot \vec{v}_1 = 0$ נותנת וקטור עצמי נוסף, נסמנו $\vec{v}_2$.

ד.* המשיכו את התהליך, וקבלו: קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ המורכב מוקטורים עצמיים של A. (כלומר A ניתנת ללכסון אורתוגונלי.)

4.