

משוואות דיפרנציאליות רגילות, מועד א'. אוניברסיטת בן גוריון

<p style="text-align: center;"><u>כללים</u>: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטייטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.0061 מרצה: ד. קרנר תאריך: 06.07.2023 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 110 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני</p>
---	---

יש לנמק היטב את כל התשובות.

1. א. (10 נקודות) קבלו את הפתרון הכללי של מד"ר $x' + f(t) \cdot x = g(t)$, כאשר $f, g \in C^0(a, b)$ (צריך להראות איך מגיעים לפתרון, לא רק לרשום נוסחה סופית)

ב. (10 נקודות) קבלו את הפתרון הכללי של מד"ר $x^{(4)} - 5x^{(3)} + 6x^{(2)} = 0$ (מספיק להסתמך על תוצאה הנלמדה בכיתה)

2. (30 נקודות) נתבונן במד"ר $x' = e^{xt} \cdot \sin(x^2)$ עם תנאי התחלה $x(t_0) = x_0$

א. עבור אילו תנאי התחלה הפתרון יחיד (מקומית)?

ב. עבור אילו תנאי התחלה הפתרון אנליטי (ממשי) מקומית ליד t_0 ?

ג. מצאו את כל הנקודות של שיווי משקל.

ד. עבור אילו תנאי התחלה קיים פתרון גלובלי $x(t) \in C^\omega(\mathbb{R})$?

ה. עבור אילו תנאי התחלה הפתרון מונוטוני בתחום הגדרתו? הסומו?

ו. עבור כל נקודת שיווי משקל בדקו את (אי-)יציבות.

3. א. (20 נקודות) נניח כי כל הערכים העצמיים של $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ מקיימים: $Re(\lambda) < 0$. הוכיחו: ראשית הצירים זאת נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית של מד"ר $\underline{x}' = A \cdot \underline{x}$

ב. (20 נקודות) יהיו $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ פתרונות פרטיים של מד"ר $\underline{x}' = A(t) \cdot \underline{x} + \underline{b}(t)$ כאן $A(t) \in Mat_{3 \times 3}(C^0(\mathbb{R}^1))$ ו $\underline{b} \in Mat_{3 \times 1}(C^0(\mathbb{R}^1))$. נניח שמתקיים: $\underline{x}_i(t_0) = \hat{e}_i$ (הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3). מצאו את הפתרון הכללי של המד"ר.

ג. (20 נקודות) יהי $\underline{x}(t) \neq 0$ פתרון של מד"ר $\underline{x}' = A(t) \cdot \underline{x}$ כאשר $A(t) \in Mat_{n \times n}(C^0(\mathbb{R}^1))$ בעלת מחזור T . הוכיחו: λ הינו ערך עצמי של מטריצת מונודרומיה. נניח שמתקיים: $\underline{x}(t+T) = \lambda \cdot \underline{x}(t)$ לכל $t \in \mathbb{R}^1$.

בהצלחה!