

משוואות דיפרנציאליות רגילות, מועד ב'

אוניברסיטת בן גוריון

<p><u>כללים</u>: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של...".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.0061 מרצה: ד. קרנר תאריך: 30.07.2023 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 110 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני</p>
---	---

יש לנמק היטב את כל התשובות.

1. א. (10 נקודות) קבלו פתרון כללי של מד"ר $x' = -\frac{x \cdot \cos(xt) + 2t}{t \cdot \cos(xt) + 3x^2}$ (מספיק לרשום אותו בצורה $(F(t, x) = const)$)

ב. (15 נקודות) יהיו $x(t), y(t)$ פתרונות של מד"ר $x' = A(t)x + b(t)$. הוכיחו: $\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \cdot e^{\int_{t_0}^t \|A(s)\|_{op} ds}$

2. (25 נקודות) נתון מד"ר $x' = f(t, x)$, כאשר $f(t, x) = \begin{cases} \frac{x^4 + t^4}{x^2 + t^2} + e^x, & (x, t) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, t) = (0, 0) \end{cases}$

א. עבור אילו תנאי חתחלה הפתרון יחיד?

ב. עבור אילו תנאי חתחלה הפתרון אנליטי (ממשי) מקומית ליד t_0 ?

ג. עבור אילו תנאי חתחלה קיים פתרון גלובלי $x(t) \in C^1(\mathbb{R})$?

3. (40 נקודות) נתבונן במד"ר $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0$, כאשר $a_j(t) \in C^\omega(\mathbb{R}^1)$ לכל j .

א. נניח שפתרון פרטי מקיים (ליד $t = 0$): $x(t) = c_n t^n + O(t^{n+1})$. הוכיחו: $x(t) \equiv 0$.

ב. הוכיחו: למרחב הפתרונות של המד"ר קיים בסיס מיוחד, $x_1(t), \dots, x_n(t)$, המקיים $x_{j+1}(t) = \frac{t^j}{j!} + O(t^{j+1})$.

ג. תהי $\mathbb{X}(t)$ המטריצה היסודית המתאימה לבסיס של סעיף ב'. חשבו את $\mathbb{X}(0)$.

ד. נניח כי כל המקדמים $\{a_j\}$ הנם קבועים וניקה את הבסיס המיוחד הזה.

הוכיחו: הפתרון הכללי של מד"ר $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = b(t)$ נתון ע"י $\text{Span}_{\mathbb{R}}[x_1(t), \dots, x_n(t)] + \int_0^t x_n(t-s)b(s)ds$.

4. (20 נקודות) יהי $x(t) \not\equiv 0$ פתרון של מד"ר $x'' + t \cdot \sin(t) \cdot x = 0$.

א. הוכיחו: קבוצת האפסים של $x(t)$ הנה בדידה (ללא נקודות הצטברות).

ב. נסמן ע"י Δ_j את המרחק בין שני אפסים עוקבים. הוכיחו: קבוצה $\{\frac{1}{\Delta_j}\}_j$ לא חסומה מלעיל.

בהצלחה!