משוואות דיפרנציאליות רגילות, מועד ג.

אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.0061 מרצה: ד. קרנר תאריך: 10.09.2023 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 110 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים	<u>כללים</u>: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".

<u>יש לנמק היטב את כל התשובות.</u>

1. (20 נקודות) נתבונן במד"ר $x' = |sin(x^2)| + t^2$. הוכיחו:
   א. עבור כל תנאי התחלה קיים פתרון מקומי יחיד, והוא גזיר ברציפות.
   ב. כל פתרון מקומי מתרחב לפתרון גלובאלי, $x(t) \in C^1(\mathbb{R}^1)$.
   ג. לכל פתרון גלובאלי, $x(t) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, קיים אפס יחיד.
   ד. עבור תנאי התחלה $x(0) = 0$ הפתרון אנליטי ליד $t = 0$.

2. א. (20 נקודות) נתבונן במד"ר $\underline{x}' = A \cdot \underline{x}$, כאשר $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ אנטי-סימטרית. ($n \geq 2$)
   i. הוכיחו: כל הפתרונות של המד"ר הנם חסומים.
   ii. האם כל פתרון בהכרח מחזורי?

   ב. (10 נקודות) יהיו $\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_n(t)$ פתרונות של מד"ר $\underline{x}' = A(t) \cdot \underline{x}$. כאן $A(t) \in Mat_{n\times n}(C^0(\mathbb{R}^1))$.
   ניקח את ה Wronskian שלהם, $W(t)$. הוכיחו: אם $W(t_o) = 0$ (עבור t_o מסוים), אז $W(t) \equiv 0$.

   ג. (20 נקודות) תהיינה $\{A_i\}$ מטריצות קבועות ומתחלפות (כלומר $A_iA_j = A_jA_i$ לכל i, j).
   רשמו את הפתרון הכללי של מד"ר $\underline{x}' = [\sum A_i g_i(t)] \cdot \underline{x}$. כאן $\{g_i(t)\}$ פונקציות רציפות כלשהן והסכום סופי.

3. (20 נקודות) נתבונן במד"ר $x' = -\frac{1}{10}ln(1+x) - 2sin(y)$, $y' = e^x - \sqrt{1+y}$.
   הוכיחו: ראשית הצירים הנה נקודה exp -יציבה.

4. (20 נקודות) יהי $x(t) \not\equiv 0$ פתרון פרטי של מד"ר $x'' + (1 + \frac{1}{t^2}) \cdot x = 0$.
   נסמן את האפסים שלו ע"י $\dots < t_i < t_{i+1} < \dots$. הוכיחו: $lim_{i\to\infty}|t_{i+1} - t_i| = \pi$.

בהצלחה!