

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב – המחלקה למתמטיקה – סמסטר א' – תשפ"ה

חשבון דיפרנציאלי להנדסת חשמל (201-1-9671)

דף תרגילים מס' 10

1. תהי  $f(x)$  פונקציה מוגדרת ורציפה בתחום  $(-\infty, +\infty)$ . נתון כי  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ .

$$f(-2) = -4, f(3) = 5$$

(א) הוכיחו כי קיים  $\max_{x \in (-\infty, +\infty)} f(x)$ .

(ב) הוכיחו כי למשוואה  $f(x) + 1 = x$  קיימים לפחות שלושה פתרונות ממשיים שונים.

2. יהיו  $f(x)$  ו- $g(x)$  פונקציות מוגדרות ורציפות בתחום  $(-\infty, +\infty)$ . נתון כי  $f(g(x)) = g(f(x))$  לכל  $x$  ממשי. הוכיחו כי אם למשוואה  $f(f(x)) = g(g(x))$  קיים פתרון, אז גם למשוואה  $f(x) = g(x)$  קיים פתרון. הראו באמצעות דוגמא כי התנאי על רציפות של הפונקציות הוא הכרחי.

3. תהי  $f: (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$  פונקציה רציפה ויהיו  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ . הוכיחו כי קיים  $x_0 \in (a, b)$ , כך ש-  

$$f(x_0) = \sqrt[n]{f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n)}$$

4. קבעו האם פונקציות הבאות רציפות במידה שווה בתחום  $[0, +\infty)$ :

$$(א) f(x) = \sin^2 x \quad (ב) f(x) = \sin(x^2)$$

5. חקרו את הגזירות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{רציפולי } x \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \quad (ג) \quad f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}} \quad (ב) \quad f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{|x|}, & , x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & , x = 0 \end{cases} \quad (א)$$

6. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם  $|f(x)|$  גזירה בנקודה  $x_0$ , אזי גם  $f(x)$  גזירה בנקודה  $x_0$ ;

(ב) אם  $f(x)$  גזירה בנקודה  $x_0$  ואילו  $|f(x)|$  אינה גזירה בנקודה  $x_0$ , אז  $f(x_0) = 0$ ;

(ג) אם  $f(x)$  גזירה בנקודה  $x_0$  ואילו  $g(x)$  אינה גזירה בנקודה  $x_0$ , אז  $f(x) + g(x)$  אינה גזירה בנקודה  $x_0$ ;

(ד) אם  $f(x)$  ו- $g(x)$  אינן גזירות בנקודה  $x_0$ , אז  $f(x) \cdot g(x)$  אינה גזירה בנקודה  $x_0$ ;

(ה) אם  $f(x)$  גזירה בקטע סופי  $(a, b)$  ומתקיים  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , אזי גם  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = +\infty$ .