

# אוניברסיטת בן גוריון – המחלקה למתמטיקה- סמסטר א' תשפ"ה

## חשבון דיפרנציאלי להנדסת חשמל (201-1-9671)

### דף תרגילים מספר 11

1. הוכיחו את האי שוויונות הבאים:

א. לכל  $x \in [0,1]$  מתקיים:  $x^{123}(1-x)^{321} \leq \frac{123^{123} \cdot 321^{321}}{444^{444}}$

ב. לכל  $1 < a < b$  מתקיים:  $\frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1}$

ג. עבור  $0 < x < 1$  מתקיים:  $x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2. תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$  וגזירה בקטע  $(a, b)$  ומתקיים:  $f^3(b) - f^3(a) = a^3 - b^3$ . הוכיחו כי למשוואה  $f^2(x) \cdot f'(x) + x^2 = 0$  יש לפחות פתרון אחד ב-  $(a, b)$ .

3. הוכיחו כי למשוואה  $x^{10} + x^4 + 2x^2 - 12 = 0$  יש שתי פתרונות בלבד.

4. תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים ב-  $[-1,1]$  ומתקיים:  $f(-1) + f(1) = 2f(0)$ . הוכיחו כי קיים  $x_0 \in (-1,1)$  שעבורו מתקיים  $f''(x_0) = 0$

5. תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה ב-  $\mathbb{R}$  ונניח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

א. הוכיחו כי קיים  $x_0 \in \mathbb{R}$  כך ש-  $f'(x_0) = 0$

ב. הוכיחו כי קיים  $c \in \mathbb{R}$  כך ש-  $c \cdot f(c) - f'(c) = 0$

רמז: היעזרו בפונקציה  $g(x) = f(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

6. תהי  $f(x)$  פונקציה הגזירה ברציפות בקטע  $[a, b]$  ונניח כי מתקיים:  $|f'(x)| < 1$

א. הוכיחו כי קיים  $k < 1$  כך שמתקיים:  $|f'(x)| \leq k$  לכל  $x \in [a, b]$

ב. הוכיחו כי למשוואה  $f(x) = x$  יש לכל היותר פתרון אחד בקטע  $[a, b]$

ג. נגדיר סדרה ע"י  $\begin{cases} a \leq x_1 \leq b \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

הוכיחו כי הסדרה הינה מתכנסת וכי הגבול שלה הוא הפתרון היחיד של המשוואה  $f(x) = x$  בקטע  $[a, b]$ .

רמז: הוכיחו כי הסדרה מתכנסת בעזרת קריטריון קושי