אוניברסיטת בן-גוריון בנגב – המחלקה למתמטיקה – סמסטר א' – תשפ"ה

חשבון דיפרנציאלי להנדסת חשמל (201-1-9671)

דף תרגילים מס' 4

1. א) הראו על פי ההגדרה כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+5\cos n}{n+1}=+\infty$;

ב) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$. הראו כי קיים $\max\{a_n\}$.

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) תהי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=0$, אזי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת;

ב) אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ והחל ממקום מסוים $b_n\geq a_n$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$;

ג) אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ והסדרה $\{a_n\cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי, אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

3. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות (הראו כי הן מונוטוניות וחסומות):

א) $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$

ב) $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}$

4. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_n\cdot\left(1-a_{n+1}\right)\geq\frac{1}{4}$, $0<a_n<1$ לכל n טבעי. הוכיחו כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומצאו את גבולה (השתמשו באי-שוויון הממוצעים: לכל $a,b>0$ מתקיים $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}$).

5. הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת ע"י נוסחת נסיגה:

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{2\left(2a_n+1\right)}{a_n+3}$$

חקרו התכנסות הסדרה ומצאו את גבולה, אם קיים.

6. הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרות ע"י: $a_1,b_1>0$ קבועים נתונים;

$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$; $a_{n+1}=\sqrt{a_n\cdot b_n}$. הוכיחו כי הסדרות מתכנסות, וכן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.