

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב – המחלקה למתמטיקה – סמסטר א' – תשפ"ה

חשבון דיפרנציאלי להנדסת חשמל (201-1-9671)

דף תרגילים מס' 6

1. הוכיחו ישירות, תוך שימוש בהגדרה, את התכנסות הטורים הבאים וחשבו את סכומם:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sin(n+1) - \sqrt{n+1} \cdot \sin n}{\sqrt{n^2 + n}} \quad (\text{ב}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n} \quad (\text{א})$$

2. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, חסומה ומונוטונית עולה. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ מתכנס.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס;

(ב) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתכנס;

(ג) אם שני הטורים החיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot b_n}$ מתכנס.

4. נתון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ מתבדר. חקרו התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 \cdot a_n} \quad (\text{ב}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n} \quad (\text{א})$$

5. חקרו התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש במבחני התכנסות מתאימים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4 + (-1)^n)^n} \quad (\text{ג}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} \quad (\text{ב}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^{\frac{n+1}{n}}}{(n^2 + 1)^n} \quad (\text{ו}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n} \quad (\text{ה}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!} \quad (\text{ד})$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)} \quad (\text{ז}) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)} \quad (\text{ח})$$