

אוניברסיטת בן גוריון – המחלקה למתמטיקה - סמסטר א' תשפ"ה

חשבון דיפרנציאלי להנדסת חשמל (201-1-9671)

דף תרגילים מספר 7

1. קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}}$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ עבור $\alpha \in \mathbb{R}$.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ה. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

2. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו- $|b_n| \leq |a_n|$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס

ג. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ מתכנס בתנאי

3. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ויהי $\sum a_n$ טור מתבדר. נסמן ב- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ מתכנס. **רמז:** השתמשו בקריטריון קושי.

4. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס בתנאי. נסמן: $N_n = \sum_{k=1}^n \frac{|a_k| - a_k}{2}$, $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{|a_k| + a_k}{2}$

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{N_n} = 1$

5. נגדיר $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. הראו שאם מקבצים את האיברים של הטור בסדר שונה, כך שלאחר כל זוג איברים חיוביים

עומד איבר שלילי מקבלים:

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} + \dots$$

6. הוכיחו לפי ההגדרה הגבול, כלומר, בשפת ϵ, δ

א. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 8) = 16$

ב. $\lim_{x \rightarrow 1} |3x - 4| = 1$