

חשבון דיפרנציאלי להנדסת חשמל - תרגיל 9

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \quad \text{ב.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2 \sin(a+x) + \sin a}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \quad \text{ד.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x + 5^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad \text{ג.}$$

2. ציינו ומיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

$$x - [x] \quad \text{ו.} \quad 1 - e^{\frac{1}{x^4}} \quad \text{ה.} \quad \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{sgn}(x) \quad \text{ד.} \quad 3^{x-\pi} \quad \text{ג.} \quad \sin \frac{1}{x^2} \quad \text{ב.} \quad x^3 \sin \frac{1}{x} \quad \text{א.}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{פונקציית הסימן המוגדרת ע"י}$$

3. תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. הוכיחו כי אם f רציפה בנק' x_0 ו- $f(x_0) > 0$

אז קיימת $\delta > 0$ כך ש- f חיובית בקטע $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

4. תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. הוכיחו/הפריכו:

א. אם f^2 רציפה אז f רציפה.

ב. אם f רציפה אז f^2 רציפה.

ג. אם f רציפה וחסומה אז הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים וסופי.

ד. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים וסופי אז קיים $x_1 \in \mathbb{R}$ כך ש- f רציפה ב- $[x_1, \infty)$.

5. עבור אילו ערכי a, b הפונקציות הבאות רציפות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(ax) - \cos(2x)}{x^2}, & x > 0 \\ a^2, & x = 0 \\ \frac{e^{2bx} - 1}{x}, & x < 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x}, & x > 0 \\ ax + b, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{א.}$$

6. א. הוכיחו כי למשוואה $x^3 + \cos^2 x - 1 = 0$ קיים לפחות פתרון אחד.

ב. הוכיחו כי למשוואה $x^4 - x^2 + x - 1 = 0$ יש לפחות שני פתרונות.