

משוואות דיפרנציאליות רגילות, מועד ב'. אוניברסיטת בן גוריון

<p style="text-align: center;"><u>כללים</u> : אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.0061 מרצה: ד. קרנר תאריך: 28.08.2024 משך המבחן: שעותיים ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים</p>
--	---

יש לנמק היטב את כל התשובות.

1. (20 נקודות) קבלו את הפתרון הכללי של מד"ר: $x' = a(t) \cdot x + b(t) \cdot y$, $y' = c(t) \cdot y$.
כאן $a(t), b(t), c(t) \in C^0$.

2. א. (10 נקודות) הוכיחו: כל פתרון מקומי של מד"ר $x' = \ln(1 + t^2 \cdot e^x)$ מתרחב (ביחידות) לפתרון גלובאלי אנליטי,
 $x(t) \in C^\omega(\mathbb{R}^1)$.

ב. (20 נקודות) יהיו פתרונות של מד"ר $x' = \frac{1}{1+\sin^2(t) \cdot x}$, המקיימים: $x(t_0), y(t_0) > 0$.
הוכיחו (עבור $t > t_0$): $|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| \cdot e^{-t}$.

3. (25 נקודות) יהי פתרון של מד"ר $\underline{x}' = A(t) \cdot \underline{x}$, כאן $A(t) \in Mat_{n \times n}(C^\omega(\mathbb{R}^1))$. קבלו את הפיתוח טיילור של $\underline{x}(t)$
בנקודה $t = 0$ עד הסדר השלישי כולל (כלומר: $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \dots + O(t^4)$).

4. (25 נקודות) תהי $f(t, x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ פונקציה המקיימת: $f(-t, x) = -f(t, x)$. הוכיחו: הפתרון של בעיית התחלה
 $x(0) = x_0$, $x' = f(t, x)$ (עבור $x_0 \in \mathbb{R}$ כלשהו) הינו פונקציה זוגית. (בתחום הגדרה המקסימלי שלו)