אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: 08.03.2017
שם המרצה: פרופ' ל.פריגוזין, ד"ר א.לרמן
שם הקורס: חדו"א ד'
מספר הקורס: 201-1-9221
שנה: תשע"ז סמסטר: א' מועד ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: שני דפי נוסחאות דו- צדדיים
(4 עמודים A4), מחשבון פשוט

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).
כל שאלה שווה ל- 20 נקודות.
הציון יחושב על סמך 5 השאלות הטובות ביותר ואין צורך לציין איזה שאלות לבדוק.

כל התשובות תהיינה מנומקות היטב.

בהצלחה!

שאלה מס' 1.
מצאו את הגבולות הבאים:

1א) (10 נק')
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\{x\ln x=t\}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\overset{\text{לופי.}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{e^t}{1}=1$$

$$\left(\lim_{x\to 1}x\ln x=0\right)$$

1ב) (10 נק')
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$$

$$A=\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}=\frac{1+x+x^2-7-2x+x^2}{x(x-2)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{7+2x-x^2})}=$$

$$=\frac{2x^2-x-6}{x(x-2)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{7+2x-x^2})}=$$

$$=\frac{2(x-2)(x+3/2)}{x(x-2)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{7+2x-x^2})}=\frac{(2x+3)}{x(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{7+2x-x^2})}$$

$$A\xrightarrow[x\to 2]{}\frac{(4+3)}{2(2\sqrt{7})}=\frac{3.5}{2\sqrt{7}}\approx\underline{\underline{0.6614}}$$

שאלה מס' 2.

2א) (10 נק') **האם פונקציה**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה ב- $(0,0)$ **? הסבירו!**

$f(x,y)$ לא רציפה ב- $(0,0)$ כי לא קיים

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$$

הסבר: ניקח

$(0,0) \xleftarrow[n\to\infty]{} \left(x_n=\frac{1}{n},\ y_n=0\right)$

$f(x_n,y_n)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ויהי

$(0,0) \xleftarrow[n\to\infty]{} \left(x_n'=\frac{1}{n},\ y_n'=\frac{1}{n}\right)$

$f(x_n',y_n')=\frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

גבולות שונים $\Leftarrow$ לא קיים גבול כפול

2ב) (10 נק') **מצאו פתרון כללי (כל הפתרונות) של המערכת הבאה:**

$$\begin{cases} w & -x & +y & -z & =1 \\ 2w & +x & -3y & & =2 \\ 5w & -2x & & -3z & =5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3-5L_1\to L_3]{L_2-2L_1\to L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3-L_2\to L_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$3x = 5y - 2z \qquad \boxed{x = \frac{5y-2z}{3}}$$

$$w = x - y + z + 1 =$$

$$= \frac{5y-2z}{3} - y + z + 1 = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1.$$

פתרון כללי:

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 \\ \frac{5}{3}y - \frac{2}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

שאלה מס' 3. נתונה פונקציה $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{8}xy+\frac{1}{y}$, $x,y\neq 0$.

3א) (10 נק') מצאו נקודות אקסטרמום מקומי של פונקציה $f(x,y)$.

$f'_x=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{8}y=0$

$f'_y=\frac{1}{8}x-\frac{1}{y^2}=0$

$y=\frac{8}{x^2}$

$\frac{1}{8}x-\frac{1}{64}\cdot x^4=0$

$x(8-x^3)=0$

1) $x=0$
לא בתחום
הגדרה

2) $x=2$

$y=\frac{8}{x^2}=2$

נקודה חשודה לקיצון: $M(2,2)$

$f''_{xx}=\frac{2}{x^3}$ $\quad f''_{xx}(2,2)=\frac{1}{4}$ $\quad f''_{xy}=\frac{1}{8}$

$f''_{yy}=\frac{2}{y^3}$ $\quad f''_{yy}(2,2)=\frac{1}{4}$

$\Delta=f_{xx}\cdot f_{yy}-(f''_{xy})^2\Big|_{x=2,\,y=2}=\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2>0$

$f''_{xx}=\frac{1}{4}>0$

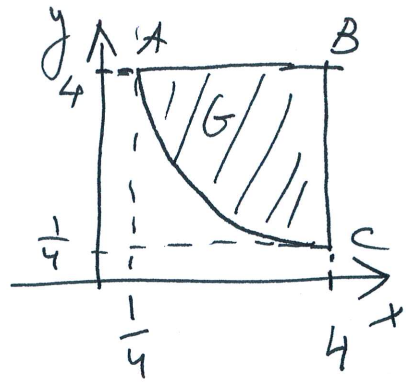
נק' $(2,2)$ נ"א min מקומי של f.

אין נקודות קיצון אחרות.

$f(2,2)=\frac{3}{2}$ min

3ב) (10 נק') מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום:

$$.G=\left\{(x,y): 0<x\le 4,\quad 0<y\le 4,\quad y\ge \frac{1}{x}\right\}$$



שפה של תחום G:

$BC\,\{x=4,\ \frac{1}{4}\le y\le 4\}$

$AB\,\{y=4,\ \frac{1}{4}\le x\le 4\}$

$AC\,\{y=\frac{1}{x}\quad \frac{1}{4}\le x\le 4\}$

1) $BC:\ h(y)=f(4,y)=\frac{1}{4}+\frac{y}{2}+\frac{1}{y}$ $\qquad h'=\frac{1}{2}-\frac{1}{y^2}=0$

$y=\pm\sqrt{2}$ $\qquad$ ($y=-\sqrt{2}$ לא בתחום) $\qquad \boxed{M_1(4,\sqrt{2})}$ נק' חשודה

$x=4$

2) $AB:\quad h(x)=f(x,4)$ $\qquad h'=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$

באופן דומה – $\boxed{M_2(\sqrt{2},4)}$

3) $AC:\ h(x)=f(x,\frac{1}{x})=\frac{1}{x}+\frac{1}{8}+x$

$h'=-\frac{1}{x^2}+1=0$ $\qquad x=+1$ $\qquad$ ($x=-1$ לא בתחום).

$y=\frac{1}{x}=1$ $\qquad \boxed{M_3(1,1)}$.

צריך לחשב את ערכי הפונקציה בקצוות הקטעים:

נקודות $\boxed{A(\frac{1}{4},4),\ C(4,\frac{1}{4}),\ B(4,4)}$

$f(M_1)=f(M_2)=\sqrt{2}+\frac{1}{4}\approx 1.66$

$f(M_3)=2\frac{1}{8}$ $\qquad f(A)=f(C)=4\frac{3}{8}$ $\qquad f(B)=2\frac{1}{2}$

בפנים התחום יש נק' min מקומי:

$f(2,2)=\frac{3}{2}$

תשובה:

ערך גדול ביותר: $f(\frac{1}{4},4)=f(4,\frac{1}{4})=4\frac{3}{8}$

ערך קטן ביותר: $f(2,2)=\frac{3}{2}$

שאלה 4.

חקור באופן מלא את הפונקציה: $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

(תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים,תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ,
נקודות פיתול, אסימפטוטות) .צייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

פתרון

תחום הגדרה: כל $x\in(-\infty,+\infty)$

נקודות חיתוך עם הצירים $f(0)=-2$, $f(2)=0$

תחומי עלייה וירידה: $f'(x)=\frac{1+2x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=0$ **נקודת קיצון** $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\sqrt{5}$.

נגזרת מחליפה סימן בנקודה $x=-\frac{1}{2}$**,תחום הירידה** $x<-\frac{1}{2}$ $f'(x)<0$

ותחום העלייה $x>-\frac{1}{2}$ $f'(x)>0$

תחומי קמירות $f''(x)=\frac{2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3(1+2x)x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{4x^2+3x-2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}=0$

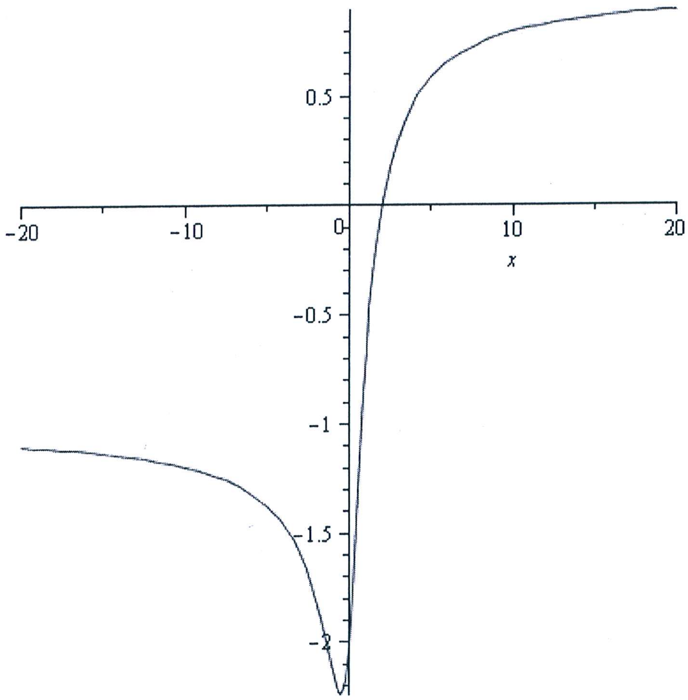
נקודות פיתול הן: $x_1=-\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{41},x_2=-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{41}$

אסימפטוטות אנכיות אין, אסימפטוטות אופקיות

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\{t=-x\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-t-2}{\sqrt{t^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{2}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-1$$



סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה מס' 5.

5א) (10 נק') תהי פונקציה $f(t)$ גזירה פעמיים ו- $u(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)$. הוכיחו כי

$$A = x^2u''_{xx} - y^2u''_{yy} + xu'_x - yu'_y = 0$$

$$u'_x = f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$u''_{xx} = f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{x^4}\right) + f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{2y}{x^3}$$

$$u'_y = f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} \qquad u''_{yy} = f''\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$A = f''\cdot\frac{y^2}{x^2} + f'\cdot\frac{2y}{x} - f''\cdot\frac{y^2}{x^2} - f'\cdot\frac{y}{x} - f'\frac{y}{x} = 0$$

5ב) (10 נק') עבור איזה ערך של פרמטר c תהי רציפה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-3^x}{x} & x\neq 0\\ c & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\text{לופ.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2^x \ln 2 - 3^x \ln 2}{1} = \ln 2 - \ln 3$$

כאשר $c=\ln 2-\ln 3$ פונקציה תהי רציפה

גם בנקודה $x=0$.

שאלה מס' 6. חשבו את האינטגרלים הבאים:

6א) (10 נק') $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}dx$

$$\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}dx = \left\{ \begin{array}{l} t=\sqrt{3x+5} \\ x=\frac{t^2-5}{3} \\ dx=\frac{2}{3}tdt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{3\cdot t\cdot \frac{2}{3}tdt}{t^2-5} = \int \frac{2t^2}{t^2-5}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2-5+5}{t^2-5}dt = 2\left[\int dt + 5\int \frac{dt}{t^2-5}\right]$$

$$= 2t + 10\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{5})^2} = 2t + \sqrt{5}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + c$$

$$= 2\sqrt{3x+5} + \sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}}\right| + c$$

$$\int_1^e \ln^2(x)dx$$ (10 נק') 6ב

$$\int_1^e \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x \Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\, dx =$$

$$= e - 2\left(x\ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\, dx \right) =$$

$$= e - 2(e - (e-1)) = \underline{\underline{e-2}}$$