

## פונקציות של מספר משתנים (המשך)

### (דף תרגילים מס' 10)

- א.** 1. מצא  $z'_u, z'_v$  כאשר:  $z = x^2 \ln y$ ;  $x = \frac{u}{v}$ ;  $y = 3u - 2v$ .
2.  $w = f(x + at, y + bt)$  - הראה ש-  $w'_t = aw'_x + bw'_y$ .
3.  $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$  - הראה ש-  $\frac{1}{x} \cdot z'_x + \frac{1}{y} \cdot z'_y = \frac{z}{y^2}$ .
4.  $u = f(x - y, y - z, z - x)$  - הראה ש-  $u'_x + u'_y + u'_z = 0$ .
5.  $z = \frac{y^2}{3x} + f(x \cdot y)$  - הראה ש-  $x^2 \cdot z'_x - x \cdot y \cdot z'_y + y^2 = 0$ .
6.  $u = \frac{xy}{z} \ln x + x \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$  - הראה ש-  $x \cdot u'_x + y \cdot u'_y + z \cdot u'_z = u + \frac{xy}{z}$ .
7.  $y = f(x - at) + g(x + at)$  - הראה ש-  $y''_u = a^2 y''_{xx}$ .
8.  $z = x \cdot f(x + y) + y \cdot g(x + y)$  - הראה ש-  $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$ .
9.  $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$  - הראה ש-  $x^2 \cdot z''_{xx} + 2xy \cdot z''_{xy} + y^2 \cdot z''_{yy} = 0$ .

**ב.** בדוק האם פונקציות הבאות הומוגניות ומצא דרגה:

- |   |                               |
|---|-------------------------------|
| 1. $f(x, y) = xy \ln \frac{x+3y}{4x+y}$ | 2. $f(x, y) = 5$              |
| 3. $f(x, y) = Ax^m y^n$                 | 4. $f(x, y) = x^y$            |
| 5. $f(x, y) = x^m + x^{m-n} y^n$        | 6. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x$ |

**ג.** 1. הוכח שאם  $f(x, y)$  פונקציה הומוגנית מדרגה 0 אז היא מקבלת אותו ערך בכל נקודה הנמצאת על אותו ישר דרך ראשית הצירים.

2.  $f(x, y)$  - הומוגנית מדרגה 2;  $x(u, v), y(u, v)$  - הומוגניות מדרגה 3. האם  $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  - הומוגנית ומאיזו דרגה?

3.  $z = f(x, y)$ ;  $\eta_f(x) = \frac{x \cdot f'_x}{f}$  - גמישות לפי x;  $\eta_f(y) = \frac{y \cdot f'_y}{f}$  - גמישות לפי y. הוכח

שאם  $f(x, y)$  הומוגנית מדרגה r, אזי  $\eta_f(x) + \eta_f(y) = r$ .

4.  $f(x, y)$  הומוגנית מדרגה 1. הוכח ש-  $f(1,1) = f'_x(2,2) + f'_y(2,2)$ .

הוכח ש-  $f''_{xx}(2,2) + f''_{xy}(2,2) = 0$ .

הוכח ש-  $f''_{yx}(2,2) + f''_{yy}(2,2) = 0$ .

5.  $f(x, y)$  הומוגנית מדרגה 3 ;  $f(2, -1) = 4$  .

(1) חשב את  $f'_x(8, -4) - 2 \cdot f'_y(4, -2)$  .

(2) חשב את  $f''_{xx}(4, -2) + f''_{xy}(-2, 1)$  וגם  $f''_{yx}(4, -2) - f''_{yy}(2, -1)$  אם נתון :  $f'_x(2, -1) = 3$  .

ד.  $f(x, y)$  הומוגנית מדרגה 3. מצא רמת ההומוגניות של פונקציות הבאות:

$$1. \quad z = xy \cdot f\left(\frac{x^3}{y}, \frac{y^3}{x}\right) \quad 2. \quad z = f'_x\left(\frac{x^2}{x+y}, \frac{y^2}{x+y}\right)$$

ה. הראה ע"י תכונות של פונקציות הומוגניות :

$$1. \quad \text{אם } z = f\left(\frac{2x^2}{y^2}; \frac{2y^2}{x^2}\right) \text{ אזי } x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = 0$$

$$2. \quad \text{אם } z = (x+y)f\left(\frac{x}{y}; \frac{y}{x}\right) \text{ אזי } x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = z$$

$$3. \quad \text{אם } z = x^3 \cdot f\left(\frac{x+y}{x}; \frac{y}{x+y}\right) \text{ אזי } x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = 3z$$

ו. תהיה  $\varphi(t, s)$  גזירה פעמיים, הומוגנית מסדר 4

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3 - x^3} - \frac{1}{xy} \varphi''_{xx}\left(xy, e^{-\frac{x}{y}}(x^2 + y^2)\right) + ye^x$$

$$\text{מצא } \varphi''_{xx}(-1, 2e) = -\frac{1}{4} \text{ אם ידוע כי } u'_x(1, -1) - u'_y(1, -1)$$

רמז: אם  $f = u_1 + u_2 + u_3$  ו-  $u_1$  הומוגנית מסדר  $k_1$ ,  $u_2$  הומוגנית מסדר  $k_2$ ,  $u_3$  לא הומוגנית

$$\text{אז } xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = k_1u_1(x, y) + k_2u_2(x, y) + xu'_{x^3}(x, y) + yu'_{x^3}(x, y)$$

ז. תן דוגמת פונקציה  $f(x, y)$  כך ש:

(1)  $f'_x(x, y)$  הומוגנית ו-  $f'_y(x, y)$  לא הומוגנית

(2)  $f'_x(x, y)$  ו-  $f'_y(x, y)$  הומוגניות ו-  $f(x^2, y)$  לא הומוגנית

**בהצלחה!**

## תשובות

$$z'_u = \frac{2u}{v^2} \ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(u - 2v)}, \quad z'_v = -\frac{2u^2}{v^3} \ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)} \quad 1 \quad \text{א.}$$

$$r = 0 \quad 2. \quad \quad \quad r = 2 \quad 1. \quad \quad \text{ב.}$$

$$4. \text{ לא הומוגנית} \quad \quad \quad r = m + n \quad 3.$$

$$6. \text{ לא הומוגנית} \quad \quad \quad r = m \quad 5.$$

$$-12, 6 \quad 2, 96 \quad 1. \quad 5. \quad \quad \quad r = 6 \quad 2. \quad \quad \text{ג.}$$

$$r = 2 \quad 2. \quad \quad \quad r = 8 \quad 1. \quad \quad \text{ד.}$$

$$-2e \quad 1. \quad \quad \text{ה.}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^4 \quad 2 \quad f(x, y) = x^2 + y + y^2 \quad 1. \quad \text{ו.}$$