

## נגזרת של פונקציה. כלל לופיטל

### (דף תרגילים מס' 4)

א. מצא עפ"י הגדרה הנגזרת של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^3 \quad .1 \qquad f(x) = \sqrt{x} \quad .2 \qquad f(x) = 4 \quad .3$$

ב. גזור את הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{\sqrt{x^5}} \quad .1$$

$$y = (2x - 7)^{20} \quad .2 \qquad y = \frac{x^4 - x^2 + 2}{x\sqrt{x}} \quad .3$$

$$y = \ln \sqrt{a^2 - x^2} \quad .6 \qquad y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}} \quad .5 \qquad y = \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10} \quad .4$$

$$y = x^{x^2+1} \quad .8 \qquad y = (1 + e^{-x})^7 \quad .7$$

$$y = x^2 \cdot e^{3x} \cdot \ln 2x \quad .10 \qquad y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 9}) \quad .9$$

$$y = \frac{x(2x-3)^5}{e^{3x^2+1}} \quad .11$$

ג. תן נוסחה כללית לנגזרת מסדר  $n$  של הפונקציות הבאות:

$$y = \ln x \quad .2 \qquad y = a^x \quad .1$$

ד.  $f(x)$  היא פונקציה המקיימת:  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} - f\left(\frac{x}{3}\right) \quad \text{חשב את הנגזרת של:}$$

ה. נתונה פונקציה:  $y = \frac{1}{x^2-1}$ . הוכח כי  $2(y')^2 - y \cdot y'' = 2y^3$ .

ו. חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x) \ln(1-x) \quad .2 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad .5 \qquad \lim_{x \rightarrow 1} x^{1-x} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x \cdot \ln x} \quad .7 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1)}{x^2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^x \quad .10 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}} \quad .9 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad .12 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2e^{-x})^{e^x + x} \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+4} \right)^{\frac{x-1}{4}} \quad .14 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad .13$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^3} - \frac{2}{1-x^2} \right) \quad .15$$

ג. הוכח את הנוסחה לחישוב בקירוב:  $\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$

ע"י שימוש בנוסחה חשב בקירוב:

$$\sqrt[3]{200} \quad .3 \qquad \sqrt[3]{70} \quad .2 \qquad \sqrt[3]{10} \quad .1$$

ח. עבור אילו ערכים של  $a, b, c$  הפונקציות הבאות הן רציפות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{(x+1)^2}, & x \neq -1 \\ -3, & x = -1 \end{cases} \quad (\alpha)$$

$$f(x) = \begin{cases} (1 + a^2 x - 9x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ 1 + x^{-\frac{a}{x}}, & x > 0 \end{cases} \quad (\beta)$$

## תשובות

$$\frac{5x^4 - x^2 - 6}{2x^2 \sqrt{x}} \quad .3 \quad 40(2x-7)^{19} \quad .2 \quad -\frac{1}{x \sqrt[3]{x}} + \frac{10}{x^3 \sqrt{x}} \quad .1 \quad .ב.$$

$$\frac{x}{x^2 - a^2} \quad .6 \quad \frac{2\sqrt{x} + 1}{6\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{(x + \sqrt{x})^2}} \quad .5 \quad \frac{5(x+1)^9(x-1)}{x^6} \quad .4$$

$$x^{x^2} (2x^2 \ln x + x^2 + 1) \quad .8 \quad -7e^{-x} (1 + e^{-x})^6 \quad .7$$

$$x \cdot e^{3x} (2 \ln 2x + 3x \ln 2x + 1) \quad .10 \quad \sqrt{x^2 - 9} \quad .9$$

$$\frac{(2x-3)^4}{e^{3x^2+1}} (-12x^3 + 18x^2 + 12x - 3) \quad .11$$

$$(-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n} \quad .2 \quad a^x (\ln a)^n \quad .1 \quad .ג.$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{(9-x^2)^3}} \quad .7$$

$$e^{-1} \quad .4 \quad 0 \quad .3 \quad 0 \quad .2 \quad 0 \quad .1 \quad .ד.$$

$$-\frac{1}{9} \quad .8 \quad 0 \quad .7 \quad 2 \quad .6 \quad \frac{1}{2} \quad .5$$

$$-1 \quad .12 \quad e^2 \quad .11 \quad 1 \quad .10 \quad e^4 \quad .9$$

$$\frac{1}{2} \quad .15 \quad e^{-\frac{7}{8}} \quad .14 \quad 1 \quad .13$$

$$\approx 5.85 \quad .3 \quad \approx 4.12 \quad .2 \quad \approx 2.17 \quad .1 \quad .ה.$$

$$a=-3, b=1 \quad (ב), \quad a=0, b=-3, c=-2 \quad (א) \quad .ח.$$