בעיה 1

דרג את המטריצה A מעל שדה $\mathbf{K}$:
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad a_{ij}\in\mathbf{K}$$

אלגוריתם

צעד 1 - מצא את העמודה הראשונה עם איבר שונה מ- 0, נניח שזו עמודה i_1.

צעד 2 - החלף בין השורות, כך שהאיבר השונה מאפס יופיע בשורה הראשונה של העמודה ה- i_1, כלומר כך ש- $a_{1i_1}\neq 0$. (איבר הזה נקרא איבר המוביל בצורה מדורגת של A)

צעד 3 - השתמש ב- a_{1i_1} כדי לאפס את כל האיברים מתחת ל- a_{1i_1}, כלומר, לכל $j>1$, יישם את פעולת השורה:
$$\frac{-a_{ji_1}}{a_{1i_1}}R_1+R_j\to R_j$$

צעד 4 - חזור על צעדים 1, 2, 3 עם תת-המטריצה המורכבת מכל השורות מלבד השורה הראשונה עד שתגיע לצורה מדורגת

הערה: אם כל האיבר המוביל בצורה מדורגת של A הוא אחד וכל איברים הנותרים באותה עמודה עם איבר המוביל הם אפסים אזי אנו נקבל מטריצה שנקראת צורה קנונית מדורגת של A.

<u>דוגמא:</u>

דרג את מטריצה A:
$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u>

נבצע $L_1\leftrightarrow L_2$ כדי שיתקיים $a_{11}\neq 0$ ונשתמש בו כציר לאפס את האיברים שמתחתיו:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1+L_4\to L_4]{-3L_1+2L_3\to L_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת משתמש ב- a_{22} כדי לאפס את האיברים שמתחתיו:
$$\xrightarrow[2L_2+L_4\to L_4]{L_2-L_3\to L_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_3+L_4\to L_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת לאחר שאיפסנו גם את האיברים שמתחת a_{33} קיבלנו צורה מדורגת.