

פתרונות

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 14 \\ 3 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 15 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 24 & 8 \end{pmatrix}, \quad C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -15 & 16 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (C^T)^T = C \quad (1)$$

$$C_{2 \times 2} \cdot D_{2 \times 3}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \qquad D_{3 \times 2} \cdot C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 17 & -10 \\ -3 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$C^T \cdot D^T = (D \cdot C)^T,$$

$$(D_{3 \times 2} \cdot C_{2 \times 2})^T = \begin{pmatrix} 17 & -3 & 7 \\ -10 & 2 & -4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$A_{3 \times 3} \cdot E_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \quad (A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 3}) \cdot D_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} -18 & -49 \\ -10 & -23 \\ -26 & -62 \end{pmatrix}, \quad E_{1 \times 3}^T \cdot B_{3 \times 3} = (-11 \quad -4 \quad 4)_{1 \times 3},$$

$$A \cdot (B \cdot D) = (A \cdot B) \cdot D, \quad E_{1 \times 3}^T \cdot E_{3 \times 1} = 9, \quad E_{3 \times 1} \cdot E_{1 \times 3}^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$f(C) = C^4 - 3C^2 + 5C - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}, \quad f(A) = \begin{pmatrix} 175 & 82 & 321 \\ 77 & 26 & 131 \\ 190 & 72 & 329 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & n=2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & n>2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = D \rightarrow X = A^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{15}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$X \cdot B = D \rightarrow X = D \cdot B^{-1} = D \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X \cdot B = D \rightarrow X = A^{-1} \cdot D \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{6} & \frac{5}{7} \\ \frac{6}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{1}{6} & \frac{25}{28} \end{pmatrix}$$

$$C \cdot X = E \rightarrow X = C^{-1} E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot E = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{16}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$B \in M_{3 \times 2}(R) \Leftarrow n=2 \text{ לכן קים } B_{m \times n} A_{2 \times 3} \quad m=3 \text{ לכן קים } A_{3 \times 2} B_{m \times n} \quad (4)$$

$$B \in M_{2 \times 3}(R) \Leftarrow m=2 \text{ לכן קים } B_{n \times m}^T A_{2 \times 3} \quad n=3 \text{ לכן קים } A_{3 \times 2} B_{n \times m}^T \quad (2א)$$

$$\text{גם מוגדרים כי לפי הגדרת כפל מטריצות } M_{n \times m}^T M_{m \times n}, M_{m \times n} M_{n \times m}^T \quad (1ב)$$

$$\text{כלומר } m=n \Leftarrow (M_{n \times m})^2 = M_{n \times m} M_{n \times m} \quad (2ב)$$

$$x_{k+1} = \frac{9}{10}x_k + \frac{1}{2}y_k \quad (5) \text{ אחוז הנוכחים היום מורכב מ-}$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{10}x_k + \frac{1}{2}y_k \quad \text{ואחוז הנעדרים היום מורכב מ-}$$

$$\text{לכן עבור } \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \text{ נקבל } A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = A \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 86 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ ביום 1 } \begin{pmatrix} 90 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ יש 90\% נוכחים כלומר E, עבור יום 2 נחשב } \\ \text{כלומר 86\% נוכחים,}$$

$$\text{ביום 3 } E_3 = A^2 \cdot E_1 = A \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 84.4 \\ 15.6 \end{pmatrix} \text{ לכן 84.4\% נוכחים}$$

$$\text{לכן 83.504\% } E_5 = A^4 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 83.504 \\ 16.496 \end{pmatrix} \text{ ביום 5 הנוכחים}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 90 \\ 10 \end{pmatrix} = A \cdot E_2 \Rightarrow E_2 = A^{-1} \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1.25 & -1.25 \\ -0.25 & 2.25 \end{pmatrix} \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (ג)$$

לכן ביום שני 100% היו נוכחים