אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 29.01.16
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: **<u>חדו"א 1 לביוטכנולוגיה</u>**
מס' הקורס 0201.1.9561
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות

<u>חומר עזר</u>: 2 דפי נוסחאות (4 עמודים). מחשבון פשוט עם צג קטן.

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות
בדפים <u>המיועדים לכך בלבד</u>
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה)
לכל השאלות משכל שווה (20 נקודות)
נבדקות כל 6 השאלות. מתחשבים ב-5 התשובות הטובות ביותר.

בהצלחה!

שאלה מס' 1. הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{\sin^6 x}{x^4}\,dx < \frac{2}{3}$.

רמז: הוכיחו כי כל אחד מהאינטגרלים $\int_0^1 \frac{\sin^6 x}{x^4}\,dx$ ו- $\int_1^\infty \frac{\sin^6 x}{x^4}\,dx$ קטן מ- $\frac{1}{3}$.

1) עבור כל $x \neq 0$ מתקיים $|\sin x| < |x|$. אז

$$\int_0^1 \frac{\sin^6 x}{x^4}\,dx < \int_0^1 \frac{x^6}{x^4}\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

אז

2) $|\sin x| \leq 1$. אז

$$\int_1^\infty \frac{\sin^6 x}{x^4}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^4} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^4} = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_1^A = \frac{1}{3}$$

אז

$$\int_0^\infty \frac{\sin^6 x}{x^4}\,dx < \frac{2}{3}$$

שאלה מס' 2.

2א) (13 נק') עבור איזה ערכים של פרמטרים a, b תהיה רציפה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{(x-1)\sqrt{a}} & 1<x \end{cases}$$

צריך לבחור את הפרמטרים כך ש-f תהיה רציפה ב- $x=\pm 1$.

1) $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = 1-a$, $\quad f(-1) = \lim\limits_{x\to -1-} f(x) = b-2$

f רציפה ב- $x=-1$ אם $\underline{1-a=b-2}$

2) $$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{4(\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a})}{(x-1)\sqrt{a}} = \lim_{x\to 1+} \frac{4}{\sqrt{a}}\cdot\frac{(x-1+a)-a}{(x-1)(\sqrt{x-1+a}+\sqrt{a})} =$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{4}{\sqrt{a}\cdot(\sqrt{x-1+a}+\sqrt{a})} = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

$$f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = b$$

f רציפה ב- $x=1$ אם $\frac{2}{a}=b$.

פותרים מערכת $\begin{cases} a+b=3 \\ \frac{2}{a}=b \end{cases}$ ומקבלים $a^2-3a+2=0$

$a_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$ $\nearrow 2$, $\searrow 1$

<u>תשובה:</u>

$a=1$, $b=2$ או $a=2$, $b=1$

2ב) (7 נק') מצאו את הגבול הבא:

$$I = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

משתמש בכלל לופיטל:

$$I = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}}{-\frac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 \cdot 2}{(x^2+1)(x^2-1)} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \underline{\underline{2}}$$

שאלה מס' 3.

3א) (10 נק') כדי לחשב בקירוב אינטגרל $I=\int_0^{0.2}\frac{\sin x}{x}dx$ מחליפים פונקציה $\sin x$ בפולינום מקלורן שלה ממעלה חמש, $T_5(x)$, ומחשבים את האינטגרל $\tilde{I}=\int_0^{0.2}\frac{T_5(x)}{x}dx$.

העריכו את השגיאה $\Delta=|I-\tilde{I}|$.

$$\sin x = T_5(x) + \frac{0}{6!}x^6 + R_6(x) \qquad (T_5 = T_6)$$

$$\Delta = |I-\tilde{I}| \le \int_0^{0.2} \frac{|R_6(x)|}{x}dx$$

$$|R_6(x)| = \left| \frac{(\sin x)^{(7)}\big|_{x=c}}{7!} x^7 \right| = \frac{\cos c}{7!}x^7 \le \frac{x^7}{7!}$$

$$0<c<x\le 0.2 \qquad\qquad 0\le x\le 0.2$$

$$\Delta \le \int_0^{0.2}\frac{x^6}{7!}dx = \frac{0.2^7}{7\cdot 7!} \approx \underline{\underline{3.6\cdot 10^{-10}}}$$

3ב) (10 נק') מצאו אורך של העקום הבא:

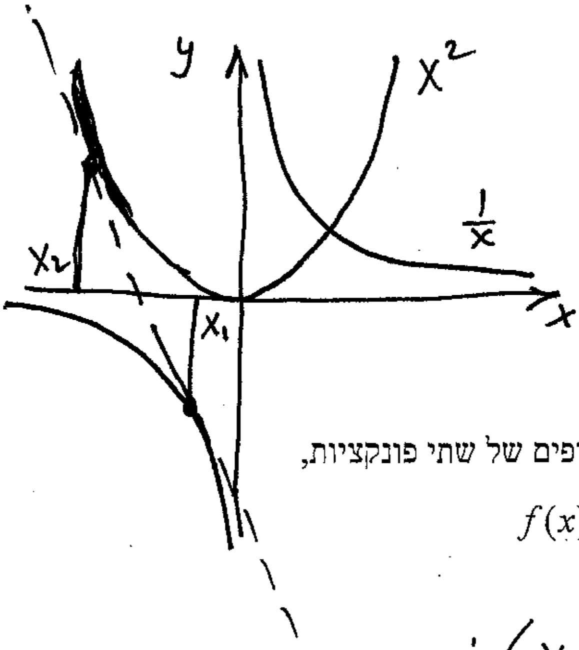
$$x=\ln\sqrt{1+t^2},\quad y=\arctan t,\quad 0\le t\le 1$$

$$x'=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t=\frac{t}{1+t^2}$$

$$y'=\frac{1}{1+t^2}$$

$$L=\int_0^1\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{\frac{t^2+1}{(1+t^2)^2}}\,dt=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=$$

$$=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^1=\underline{\underline{\ln(1+\sqrt{2})}}$$



שאלה מס' 4.

4א) (10 נק') מצאו משוואה של קו משיק <u>משותף</u> לגרפים של שתי פונקציות,

$$f(x)=\frac{1}{x}, \quad g(x)=x^2$$

קו משיק ל-f בנקודה $(x_1, f(x_1))$:

$$y=\frac{1}{x_1}+\left(-\frac{1}{x_1^2}\right)(x-x_1)$$

קו משיק ל-g בנקודה $(x_2, g(x_2))$:

$$y=x_2^2+2x_2(x-x_2)$$

אם זה אותו קו,

$$\begin{cases} -\frac{1}{x_1^2}=2x_2 \\ \frac{1}{x_1}-\left(-\frac{1}{x_1^2}\right)x_1=x_2^2-2x_2\cdot x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=-\frac{1}{2x_1^2} \\ \frac{2}{x_1}=-x_2^2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{2}{x_1}=-\frac{1}{4x_1^4}$$

$$x_1^3=-\frac{1}{8}$$

$$x_1=-\frac{1}{2}$$

<u>תשובה</u>:

$$y=-2-4\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

או

$$\boxed{y=-4x-4}$$

4ב) (10 נק') תנו הגדרה לגבול של פונקציה: פונקציה $f(x)$ שואפת ל-L כאשר x שואף ל-a אם ...

<u>שתי הגדרות שקולות:</u>

I. $L=\lim_{x\to a} f(x)$ אם לכל סדרה $\{x_n\}$ המתקיים

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$
$$x_n \neq a$$

קיים ושווה ל-L

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

II. $L=\lim_{x\to a} f(x)$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-

$$0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

שאלה מס' 5. חקרו את הפונקציה $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{3+x^4}}$ וסרטטו את הגרף שלה.

צריך למצוא: תחומי הגדרה, רציפות ודיפרנציאביליות, אסימפטוטות , תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול.

1. f מוגדרת ורציפה עבור כל x, גזירה פרט לנק' $x=0$.

2. $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$ אז $y=0$ אסימפטוטה אופקית כאשר $x\to\pm\infty$

3. f פונק' זוגית. נתבונן בתחום $x\geq 0$.

$$f'=\left[x(3+x^4)^{-1/2}\right]'=(3+x^4)^{-1/2}-\tfrac{1}{2}x(3+x^4)^{-3/2}\cdot 4x^3=$$
$$=(3+x^4)^{-3/2}\left[3+x^4-2x^4\right]=(3+x^4)^{-3/2}(3-x^4)$$

$$f''=-\tfrac{3}{2}(3+x^4)^{-5/2}4x^3(3-x^4)-(3+x^4)^{-3/2}4x^3=$$
$$=-6x^3(3+x^4)^{-5/2}(3-x^4)-4x^3(3+x^4)^{-3/2}=$$
$$=-2x^3(3+x^4)^{-5/2}\left[9-3x^4+6+2x^4\right]=$$
$$=2x^3(15-x^4)(3+x^4)^{-5/2}$$

תחומי עליה וירידה:

f': 0 — $+$ ↗ — $\sqrt[4]{3}$ — $-$ ↘

קמירות וקעירות:

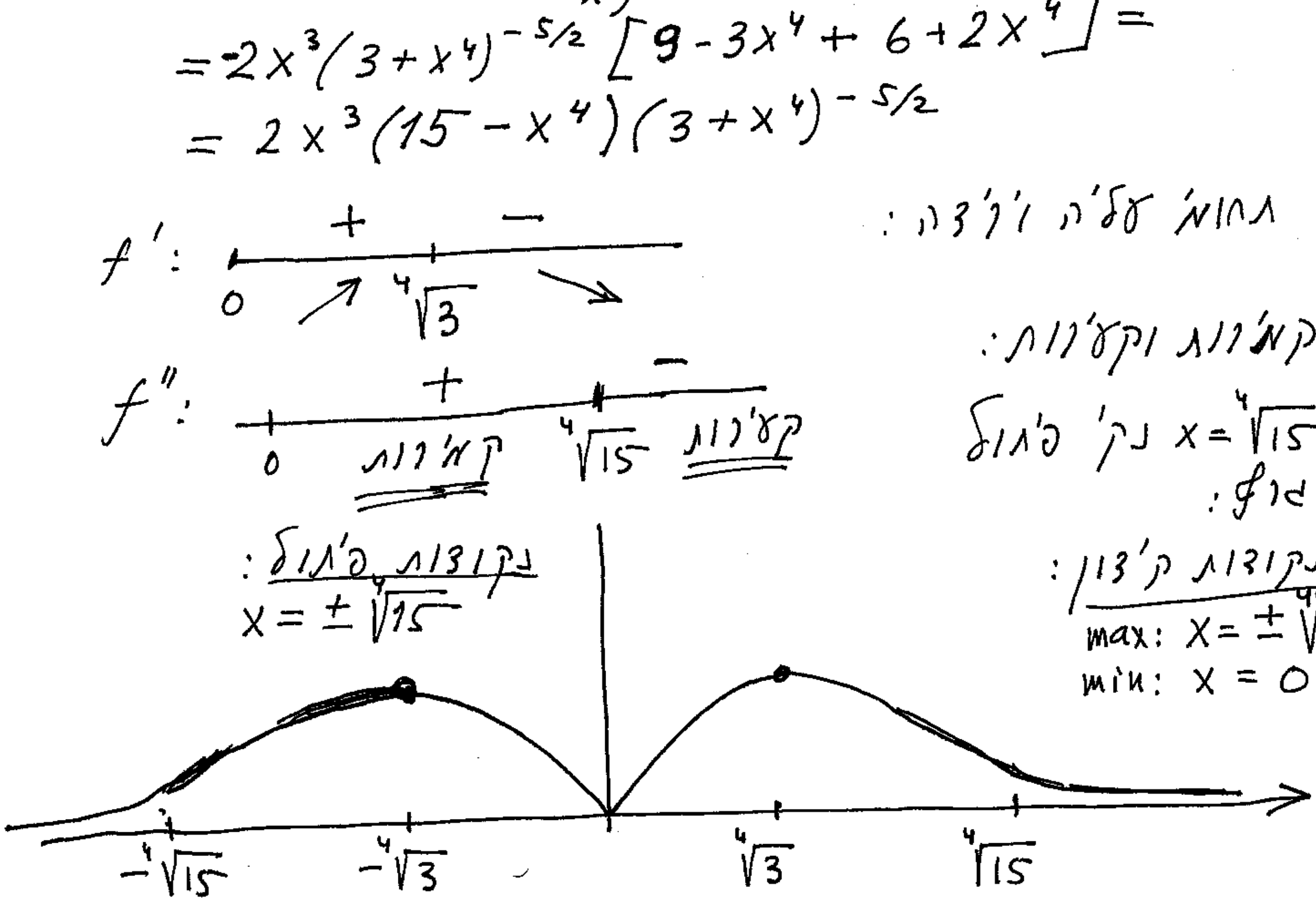
f'': 0 — $+$ קמירות — $\sqrt[4]{15}$ — $-$ קעירות

$x=\sqrt[4]{15}$ נק' פיתול

4. גרף:

נקודות קיצון:
max: $x=\pm\sqrt[4]{3}$
min: $x=0$

נקודות פיתול:
$x=\pm\sqrt[4]{15}$



שאלה מס' 6. חשבו אנטגרלים:

6א) (10 נק') $I=\int \frac{\cos(2x)}{e^{3x}}dx$ נשתמש באינטגרצ'יה לפי חלקים פעמיים:

$$I=\int \cos(2x)e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}\int \cos(2x)\,d(e^{-3x})=$$

$$=-\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\cos 2x+\int 2\sin(2x)e^{-3x}dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\cos 2x-\frac{2}{3}\int \sin(2x)\,d(e^{-3x})\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\cos 2x-\frac{2}{3}\left\{e^{-3x}\sin 2x-2\underbrace{\int \cos 2x\cdot e^{-3x}dx}_{=I}\right\}\right]$$

$$I\left(1+\frac{4}{9}\right)=-\frac{1}{3}\left[\cos 2x-\frac{2}{3}\sin 2x\right]e^{-3x}+C$$ SK

$$\underline{I=\frac{3}{13}\left[\frac{2}{3}\sin 2x-\cos 2x\right]e^{-3x}+C}$$

$$I = \int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$$ 6ב) (10 נק')

אינטגר'ה לפי חלקים:

$$I = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3 - \int_0^3 x\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)' dx$$

$$\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\cdot(1+x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

$$I = 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ 0\le t\le\sqrt{3}\end{array}\right\} = 3\cdot\frac{\pi}{3} - \int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2\,dt}{t^2+1} = \pi - \int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \pi - \sqrt{3} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}}$$