46 עם פתרונות

תאריך הבחינה: 01.02.2004
מרצה : ד"ר קגלובסקי
מבחן בקורס: חדו"א 1 לביוטכנולוגיה
מס' הקורס: 201-1-9561
שנה תשס"ג סמ' א' מועד א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות, מחשבון

- *ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 20 נקודות.*
- *תשובתך תהיו מלאות ומנומקות היטב.*
- *נא לכתוב ברור ונקי!*

### *שאלה מס' 1.*

חשב את הנפח של הגוף הנוצר כתוצאה מסיבוב של פרבולה $y=2x-x^2$ בין נקודות x=0 ו- x=2 סביב ציר ה- x.

### *שאלה מס' 2.*

חשב את הגבולות הבאים:

א) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-tgx}$$

ב) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

ג) $$\lim_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

### *שאלה מס' 3.*

חקור את הפונקציה $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ על פי הסעיפים הבאים:

1. תחום ההגדרה
2. סימטריה
3. אסימפטוטות
4. נקודות חיתוך עם הצירים
5. תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון
6. תחומי קמירות וקעירות ונקודת פיתול
7. שירטוט הגרף

***שאלה מס' 4.***

א) הוכח כי עבור כל $0 < x$ מתקיים:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

ב) חשב בעזרת טור טיילור עם שארית בצורה של לגרנז' את הערך של $\sqrt{11/10}$ בדיוק 0.01.

***שאלה מס' 5.***

חשב את האינטגרלים הבאים:

א) $\int_0^1 \frac{e^x + e^{2x}}{(2+e^x)^2} dx$

ב) $\int \frac{1-\cos x}{\sin x} dx$

***שאלה מס' 6.***

יהי $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. חשב אורך העקומה $y = \ln \sin x$ $\quad \alpha < x < 2\alpha,$

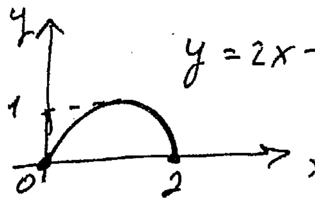
***בהצלחה !***

1.2.04 פתרונות מבחן א' לביוטכנולוגים

מועד א'

.1

$$V=\pi\int_0^2 y^2dx=$$




$$=\pi\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{16}{15}\pi$$

.2 (א

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x-tg x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1-\frac{1}{\cos^2x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\frac{-2\sin x}{\cos^3x}}=-\frac{1}{2}$$

(ב

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}}=1^0=1$$

(ג

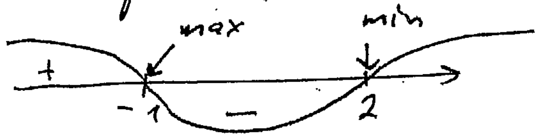
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}2\sin\left(\underbrace{\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}}_{\text{מתאפסת}}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)}_{\text{חסומה}}=0$$

.3

$$f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{x+2}{x^2}\right)\qquad x\neq0$$




$$x^2-x-2=0\Rightarrow x_1=2\quad x_2=-1$$

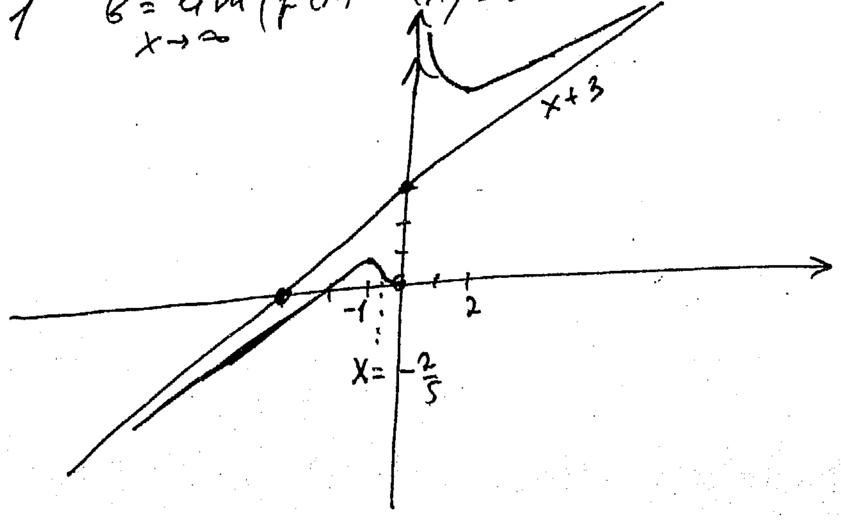
$$f''=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)-e^{\frac{1}{x}}\frac{x^2-(x+2)2x}{x^4}$$

$$f''=\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(5x+2)\Rightarrow x=-\frac{2}{5}$$ פיתול

$$\lim_{x\to0^+}(x+2)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}(x+2)e^{\frac{1}{x}}=0$$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1\qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=3$$



$$x-\frac{x^3}{6} < \underbrace{\sin x < x}_{3'N1}$$ (1c . 4

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_3$$

$$R_3 = \frac{f''''(c)}{4!}x^4 = \frac{\sin c}{4!}x^4 > 0 \qquad 0<c<x$$

(2

$$\sqrt{11/10} = \sqrt{1.1} = \sqrt{1+0.1}$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^3}{3!}, \ldots$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0.1^2}{2!} < 0.01 \Rightarrow \sqrt{11/10} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0.1 = 1.05$$

. 5

$$\int_0^1 \frac{e^x+e^{2x}}{(2+e^x)^2}dx \overset{e^x=t}{=\!=\!=} \int_1^e \frac{\cancel{t}+t^2}{(2+t)^2}dt = \int_1^e \frac{1}{(2+t)}dt - \int_1^e \frac{dt}{(2+t)^2} =$$ (1c

$$= \ln|2+t|\Big|_1^e + \frac{1}{2+t}\Big|_1^e = \ln\frac{2+e}{3} + \frac{1}{2+e} - \frac{1}{3}$$

(2

$$\int \frac{1-\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx =$$

$$= -2\int \frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = -2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$$

. 6

$$\alpha < x < 2\alpha \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$y = \ln\sin x$$

$$L = \int_\alpha^{2\alpha} \sqrt{1+y'^2}dx = \int_\alpha^{2\alpha} \sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx = \int_\alpha^{2\alpha} \frac{dx}{\sin x} \overset{\cos x = t}{=\!=\!=}$$

$$\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} \qquad \frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{tg\frac{x}{2}}$$

$$= \int_\alpha^{2\alpha} \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int_\alpha^{2\alpha} \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}\left[\int_\alpha^{2\alpha} \frac{d(\cos x)}{1-\cos x} + \int_\alpha^{2\alpha} \frac{d(\cos x)}{1+\cos x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\Big|_\alpha^{2\alpha} = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} - \ln\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}\,\frac{2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \ln\frac{\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}} = \ln\frac{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} > 0\,!$$