אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 05.02.13
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: **<u>חדו"א 1 לביוטכנולוגיה</u>**
מס' הקורס 0201.1.9561
מועד א סמ' א שנה תשע"ג
משך הבחינה: 3 שעות

<u>חומר עזר</u>: 2 דפי נוסחאות (4 עמודים). אסור להשתמש במחשבון.

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות
בדפים <u>המיועדים לכך בלבד</u>
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה)
לכל השאלות משכל שווה (20 נקודות)
נבדקות כל 6 השאלות. מתחשבים ב-5 התשובות הטובות ביותר.

בהצלחה!

שאלה מס' 1. השתמשו בהגדרה של נגזרת כדי לחשב $f'(0)$ כאשר

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\sin x}-2^{x}}{x^{2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$f=\frac{2^{x}\left(2^{\sin x-x}-1\right)}{x^{2}} \qquad x\neq 0$$

$$u=\sin x-x=-\frac{x^{3}}{3!}+O(x^{5})$$

$$2^{u}=2^{0}+2^{0}\ln 2\cdot u+\underbrace{O(u^{2})}_{\overset{\shortparallel}{O(x^{6})}}=1+\ln 2\left(-\frac{x^{3}}{3!}\right)+O(x^{5})$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\overset{=0}{f(0)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{x}\left(2^{\sin x-x}-1\right)}{x^{3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2^{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^{3}}{6}\ln 2+O(x^{5})}{x^{3}}=-\frac{\ln 2}{6}$$

שאלה מס' 2.

2א (10 נק') מצאו את הגבול הבא: $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$

$$A_n = n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right) = n^3\left(\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^3}} - \sqrt{1+\frac{3}{n^3}}\right)$$

$$\sqrt[3]{1+\alpha} = 1+\frac{1}{3}\alpha + O(\alpha^2) \Longrightarrow$$

$$A_n = n^3\left(1+\frac{5}{3n^3} - 1 - \frac{3}{3n^3} + O(n^{-6})\right) = \frac{2}{3} + O(n^{-3})$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2}{3}$$

2ב (10 נק') מצאו פולינום מקלורן ממעלה 5 של פונקציה $f(x)=\ln(\cos x)$

$$f = \ln(\cos x) = \ln\left(1+\underbrace{\left\{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+O(x^6)\right\}}_{u}\right)$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3), \quad O(u^3) = O(x^6). \Longrightarrow$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+O(x^6)\right)^2 + O(x^6) =$$

$$= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^4}{8}+O(x^6) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+O(x^6).$$

$$T_5(x) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$$

שאלה מס' 3.

3א (10 נק') העקום המישורי הבא

$$x(t) = a(t - \cos t), \quad y(t) = a(1 - \sin t)$$

נתון בצורה פרמטרית. מצאו משוואה של קו משיק לעקום זה בנקודה $\left(x(\pi/3), y(\pi/3)\right)$.

קו משיק:

$$y = y\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - x\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\left(1 - \sin\frac{\pi}{3}\right) = a\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\left(\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = a\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{dy}{dt}(\pi/3)}{\frac{dx}{dt}(\pi/3)} = \left.\frac{-a\cos t}{a(1+\sin t)}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

תשובה:

$$\underline{y = a\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2+\sqrt{3}}\left(x - a\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\right)\right)}$$

3ב (10 נק') העקום המישורי הבא $-\pi \le \varphi \le -\pi/2$, $r = 2(1-\cos\varphi)$ נתון
בקואורדינטות קוטביות (פולריות).   חשבו אורך העקום.

$$L = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi = 2\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\varphi + (1-\cos\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= 2\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-2\cos\varphi}\, d\varphi = 2\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 4\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = \left\{ \begin{array}{c} \text{בקטע} \\ [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ \sin\frac{\varphi}{2} < 0 \end{array} \right\} =$$

$$= -4\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$$

שאלה מס' 4. חקרו את הפונקציה $y=\frac{(x-2)^2}{x-1}$ וסרטטו את הגרף שלה.

<u>צריך למצוא</u>: תחומ' ההגדרה ורציפות, אסימפטוטות , תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות.

תחום הגדרה ורציפות : $x\neq 1$

(נק' חיתוך עם הצירים : $(0,-4)$, $(2,0)$)

אסימפטוטות:

אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-2)^2}{x-1} \overset{\text{"}\frac{1}{0^+}\text{"}}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-2)^2}{x-1} \overset{\text{"}\frac{1}{0^-}\text{"}}{=} -\infty$$

$\Leftarrow$ $x=1$ אס' אנכית.

אסימפטוטות משופעות:
$y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-2)^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x}\ \begin{matrix}:x^2\\:x^2\end{matrix}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \overset{\text{אחת}}{=} 1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-2)^2}{x-1}-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+4-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+4}{x-1}\ \begin{matrix}:x\\:x\end{matrix}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}} \overset{\text{אחת}}{=} -3.$$

קיימת אסימפטוטה משופעת והיא $y=x-3$ (גם כש $x\to\infty$ וגם כש $x\to-\infty$)

תחומי עליה וירידה ונק' קיצון:

$$y'=\frac{2(x-2)(x-1)-(x-2)^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

נק' חשודות לקיצון:

$y'=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$ או $x=2$.

	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2	$x>2$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

$\nearrow \quad \searrow \qquad \searrow \quad \nearrow$

max min

נק' קיצון: $max(0,-4)$ $min(2,0)$.

תחומי עלייה: $x<0$ או $x>2$

תחומי ירידה: $0<x<1$ או $1<x<2$.

תחומי קמירות וקעירות ונק' פיתול:

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{\cancel{(x-1)}\left[2x^2-4x+2-2x^2+4x\right]}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y''=\frac{2}{(x-1)^3}}$$

y'' לא מוגדר עבור $x=1$ אך נק' זו אינה בת.ה של הפונ'.
לא קיים x עבורו $y''=0$ לכן אין נק' פיתול.

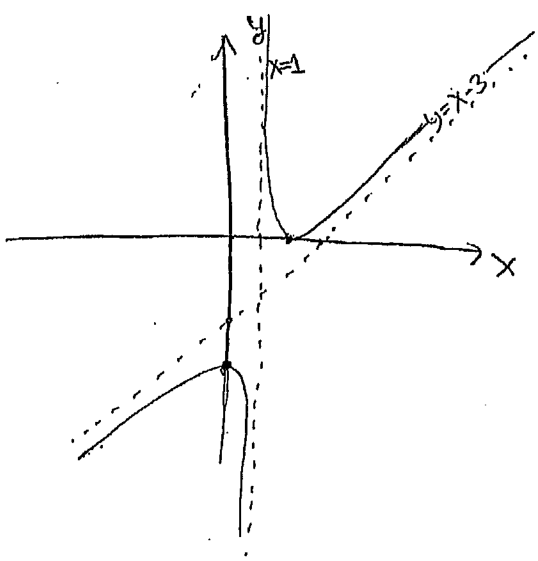
	$x<1$	1	$x>1$
y''	$-$		$+$

$\cap \qquad \cup$

תחום קמירות: $x>1$

תחום קעירות: $x<1$.

גרף הפונקציה:



שאלה מס' 5. חשבו את האינטגרלים הבאים:

5א (10 נק')

$$\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \frac{\cos x}{1+\cos x-\sin x}\,dx$$

נשתמש בהצבה טריגונומטרית אוניברסלית $t=tg\frac{x}{2}$

$$\begin{cases} \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$$

נחשב את גבולות האינט' $x=0 \Rightarrow t=tg0=0$

$x=-\frac{2\pi}{3} \Rightarrow t=tg(-\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{\frac{1-t^2}{\cancel{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1+\cancel{t^2}+1-\cancel{t^2}-2t}{\cancel{1+t^2}}}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{\cancel{2(1-t)}(1+t)}{\cancel{2(1-t)}(1+t^2)}\,dt$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{1+t}{1+t^2}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{2t}{1+t^2}\,dt = arctg(t)+\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\Big|_{-\sqrt{3}}^{0} = \frac{\pi}{3}-\ln 2.$$

$u=1+t^2$

$du=2tdt$

(*) $\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u|+C = \ln|1+t^2|+C.$

5ב (10 נק')

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$$

ב3)

$t=x^2$
$dt=2xdx$

$x=0 \Rightarrow t=0$
$x=1 \Rightarrow t=1$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}dt$$

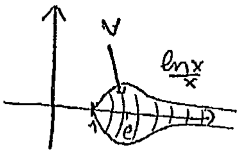
$$\left\{\begin{matrix} u=t+\frac{1}{2} \\ du=dt \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left|u+\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\right|\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left|1\tfrac{1}{2}+\sqrt{(1\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\tfrac{1}{2}+\sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right|.$$

שאלה מס' 6.

חשבו נפח של הגוף המיוצר על ידי סיבוב של תחום



$$D = \left\{ 0 \le y \le \frac{\ln x}{x}, \quad 1 \le x < \infty \right\}$$

מסביב לציר x.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \lim_{b\to\infty} \underbrace{\int_1^b \frac{\ln^2 x}{x^2} dx}_{I(b)}$$

אינטגרציה בחלקים $\int_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v$

$$I(b) = \int_1^b \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln^2 x & v = -\frac{1}{x} \\ u' = \frac{2\ln x}{x} & v' = \frac{1}{x^2} \end{matrix} \right\}$$

$$= -\frac{\ln^2 x}{x}\Big|_1^b + \int_1^b \frac{2\ln x}{x^2} dx$$

$\frac{1}{x}\Big|_1^b$

אינטגרציה בחלקים.

$$= \left\{ \begin{matrix} u = \ln x & v = -\frac{1}{x} \\ u' = \frac{1}{x} & v' = \frac{1}{x^2} \end{matrix} \right\} = -\frac{\ln^2 x}{x}\Big|_1^b + 2\left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^b - \int_1^b -\frac{1}{x^2} dx\right)$$

$$= -\frac{\ln^2 b}{b} + \overset{0}{\frac{\ln^2 1}{1}} + 2\left[-\frac{\ln b}{b} + \overset{0}{\frac{\ln 1}{1}} - \frac{1}{b} + 1\right]$$

$$V = \pi \lim_{b\to\infty} I(b) = \pi \lim_{b\to\infty} \left(-\underset{\downarrow 0}{\left(\frac{\ln^2 b}{b}\right)} - \underset{\downarrow 0}{\left(\frac{2\ln b}{b}\right)} - \underset{\downarrow 0}{\left(\frac{1}{b}\right)} + 2\right) = 2\pi.$$

$$(*) \quad \lim_{b\to\infty} \frac{\ln^2 b}{b} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" Lop}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{2\ln b}{b^2} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" Lop}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{2}{b^3} \overset{\text{"}\frac{c}{\infty}\text{"}}{=} 0$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\ln b}{b} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" Lop}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^2} \overset{\text{"}\frac{c}{\infty}\text{"}}{=} 0.$$