עם פתרונות

תאריך הבחינה: 20.02.2004
מרצה : ד"ר קגלובסקי
מבחן בקורס: חדו"א 1 לביוטכנולוגיה
מס' הקורס: 201-1-9561
שנה תשס"ג סמ' א' מועד ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות, מחשבון

- *ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 20 נקודות.*
- *תשובתך תהיו מלאות ומנומקות היטב.*
- *נא לכתוב ברור ונקי!*

שאלה מס' 1.

נתונה הפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+4x)}{x} , & x>0\\ a , & x=0\\ \dfrac{1-\cos(bx)}{x^{2}} & \end{cases}$$

1. מהם ערכים של a ו- b כדי ש- $f(x)$ תהיה רציפה ב- $x=0$?
2. האם $f(x)$ תהיה אז גזירה ב- $x=0$?

שאלה מס' 2.

א) חשב $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{xdx}{(x+1)^3}$

ב) חשב את הגבולות הבאים $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$; $\displaystyle\lim_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

שאלה מס' 3.

חקור את הפונקציה $f\left(x\right)=\dfrac{\left|1+x\right|^{\frac{3}{2}}}{x}$ על פי הסעיפים הבאים:

1. תחום ההגדרה
2. סימטריה

3. אסימפטוטות
4. נקודות חיתוך עם הצירים
5. תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון
6. תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול
7. שרטוט הגרף

שאלה מס' 4.

א) . הוכח את האי-שוויון: $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}<\sin x-\ln(1+x)<\frac{x^2}{2}$ $(\frac{\pi}{2}>x>0)$.

רמז: תשתמש בנוסחת מקלורן לפונקציות עם שארית בצורת לגרנז'.

ב) תוך שימוש בנוסחת טיילור חשב $\sqrt[5]{e}$ עם דיוק $\varepsilon=10^{-4}$

שאלה מס' 5.

חשב את האינטגרלים הבאים:

א) $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ב) $\int\frac{8tgx-4}{tg^2x(tg^2x+1)\cos^2 x}dx$

שאלה מס' 6.

נתונה עקומה בקואורדינטות קוטביות $r=a(1+\cos(\theta))$

חשב את: $(0\le\theta\le 2\pi)$

א) השטח של גוף המישורי המוגבל על-ידי העקומה .
ב) האורך העקומה .

בהצלחה !

20.02.04 פתרונות חדו"א לפיזיקה כימיה

ב'

1.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+4x)}{x}=4=a=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos(bx)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+\frac{b^2x^2}{2!}+o(x^2)}{x^2}=\frac{b^2}{2}$$

$$a=4\ ,\ b=2\sqrt{2}$$

2.

$$f'(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-\cos(2\sqrt{2}x)}{x^2}-4}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-1+\frac{8x^2}{2!}-\frac{64x^4}{4!}}{x^2}-4}{x}=0$$

$$f'(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(1+4x)}{x}-4}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4x-\frac{16x^2}{2!}+o(x^2)}{x}-4}{x}=-8$$

$$f'(0-0)\neq f'(0+0)\Rightarrow \nexists f'(0)!$$

2. א)

$$\int_0^\infty\frac{x\,dx}{(x+1)^3}=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\frac{x\,dx}{(x+1)^3}=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\right)dx=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right)\Big|_0^A=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{A+1}+\frac{1}{2(1+A)^2}\right)-$$

$$-\left(-\frac{1}{0+1}+\frac{1}{2(1+0)^2}\right)=0+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ב)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x-x^2}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)\frac{1}{x}}=$$

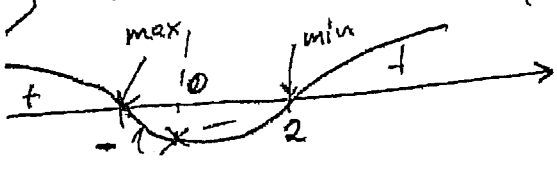
$$=\lim_{x\to 0}e^{\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1\right)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

3.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x} & x\geq -1,\ x\neq 0\\ \frac{(-1-x)^{\frac{3}{2}}}{x} & x<-1\end{cases}\Rightarrow f'=\left\{\begin{array}{l}+\frac{\sqrt{1+x}}{x^2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)\\ -\frac{\sqrt{-1-x}}{x^2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)\end{array}\right.$$

$$x=2\Leftarrow$$

$$0<-\frac{\sqrt{-1-x}}{x^2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)$$



$$f'' = \frac{\left(\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x-1\right)+\sqrt{1+x}\cdot\frac{1}{2}\right)x^2-\sqrt{1+x}\left(\frac{1}{2}x-1\right)\cdot 2x}{x^4} \qquad x\geq -1$$

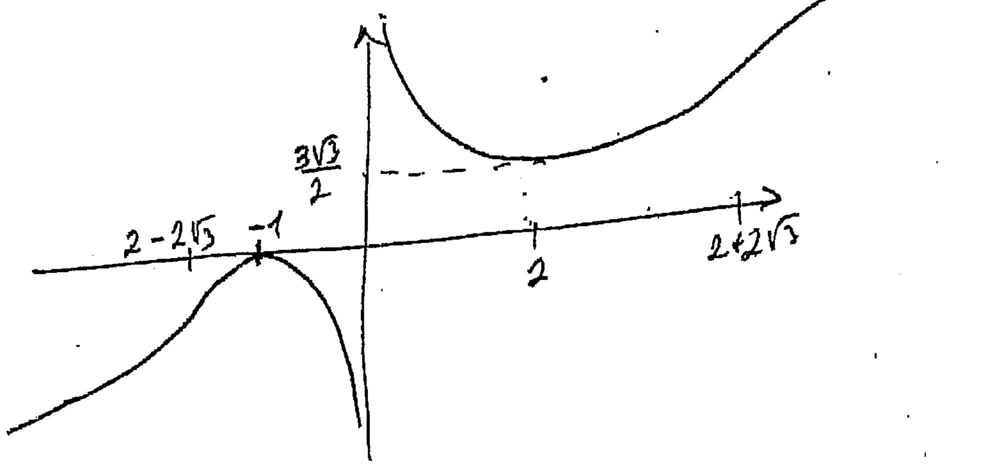
$$\frac{\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+x)\right)x^2-(1+x)\left(\frac{1}{2}x-1\right)2x}{\sqrt{1+x}\cdot x^4}=\frac{-\frac{1}{4}x^2+x+2}{\sqrt{1+x}\;x^3}$$

$f''=0 \quad x=2\pm 2\sqrt{3} \Rightarrow x=2+2\sqrt{3}$ פיתול

$x=2-2\sqrt{3}<-1\,! \Rightarrow$ רק פיתול

$\lim\limits_{\to 0+} f=+\infty \quad \lim\limits_{x\to 0-} f=-\infty \quad x=0$ אסימפטוטה

$\lim\limits_{\to\infty}\frac{f}{x}=0=a$ — $\frac{\text{אופק}}{\text{אסימפטוטה}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f-ax)\,\cancel{\exists}$ אין



4

$$\cancel{\sin x-\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+R_3-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3}+R_3}=$$

$$\sin x-\ln(1+x)=x-\frac{\cos c}{3!}x^3-x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{(1+c)^3}\frac{x^3}{3}<\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\cos c}{6}+\frac{1}{3(1+c_1)}<\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}<\sin x-\ln(1+x)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}<\frac{3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{(n+1)!}<10^{-4}$$

$n=4$

$$\sqrt[5]{e}\approx 1+\frac{1}{5}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^4}{4!}\approx 1.2214$$

$$\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \underset{u=\arcsin x}{=} -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$ .5

$u = \arcsin x$

$u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$v = -\sqrt{1-x^2}$

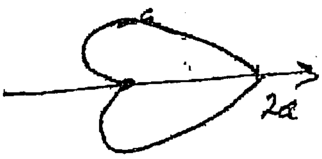
$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$$

$$\int \frac{8\,tg\,x - 4}{tg^2x\,(tg^2x+1)\cos^2 x}\,dx \underset{tg\,x = t}{=} \int \frac{8t-4}{t^2(t^2+1)}\,dt =$$

$$= \int dt\left(\frac{8}{t} - \frac{4}{t^2} - 8\frac{t}{t^2+1} + \frac{4}{t^2+1}\right) = 8\ln|t| + \frac{4}{t} - 4\ln(t^2+1) +$$

$$+ 4\,arctg\,t + C = 4\ln\frac{tg^2x}{tg^2x+1} + 4\,ctg\,x + 4x + C$$

$0 \le \theta \le 2\pi$ $\quad r = a(1+\cos\theta)$ .6



$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2$$

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta = 2\cdot 2\int_0^{\pi} a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a$$