אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 27.02.13
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: **<u>חדו"א 1 לביוטכנולוגיה</u>**
מס' הקורס 0201.1.9561
מועד ב סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות

<u>חומר עזר</u>: 2 דפי נוסחאות (4 עמודים). אסור להשתמש במחשבון.

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות
בדפים <u>המיועדים לכך בלבד</u>
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה)
לכל השאלות משקל שווה (20 בקודות)
נבדקות כל 6 השאלות. מתחשבים ב-5 התשובות הטובות ביותר.

בהצלחה!

שאלה מס' 1.

1א) (13 נק') חקרו את הפונקציה $f(x) = 2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+1$ וסרטטו את הגרף שלה.

צריך למצוא: תחום הגדרה, אסימפטוטות , תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך של הגרף עם הצירים, תחומי קמירות וקעירות.

1. תחום הגדרה:

$0 < \frac{x-1}{x} \Rightarrow \{x<0\} \cup \{x>1\}$

2. אסימפטוטות

$x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{x-1}{x} \to 1, \quad f(x) \to 2\ln 1 + 1 = 1$

אסימפטוטה אופקית: $(x \to \pm\infty)$ $y=1$

$x \to 0- \Rightarrow \frac{x-1}{x} \to +\infty, \quad f(x) \to +\infty$

$x \to 1+ \Rightarrow \frac{x-1}{x} \to 0, \quad f(x) \to -\infty$

אסימפטוטות אנכיות: $x=0, \quad x=1$

3. תחומי עליה וירידה.

$f' = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x(x-1)}$

בתחום הגדרה $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ f מונוטונית עולה, אין נקודות קיצון.

4. קמירות וקעירות:

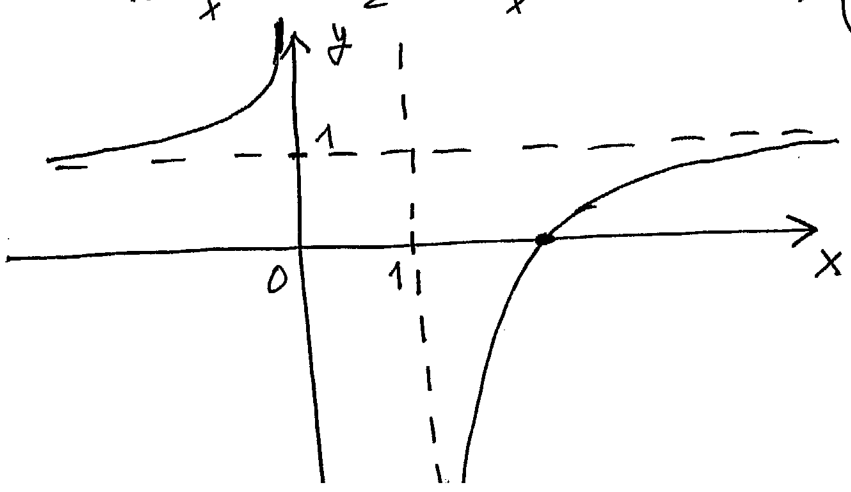
$f'' = -\frac{2(2x-1)}{x^2(x-1)^2}$

בתחום $x>1$ פונקציה קעורה, בתחום $x<0$ פונקציה קמורה

5. נק' חיתוך עם צירים: רק עם ציר x.

$y=0 \Rightarrow \ln\frac{x-1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x-1}{x} = e^{-1/2} \Rightarrow x = \frac{1}{1-e^{-1/2}}$

6. גרף:



1ב) (7 נק') מצאו נקודות קיצון של פונקציה $f(x)=\frac{x^3}{1-4x^2}$.

$$f' = \frac{3x^2-4x^4}{(1-4x^2)^2}$$

נקודות חשודות לקיצון

$x=0$, $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

סימן של f', תחומי עליה וירידה של f:

x		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
f'	$-$		$+$		$+$		$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

תשובה: $x=0$ איננה נקודת קיצון.

$$\boxed{\begin{array}{l} x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ נקודת } min \\ x=+\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ נקודת } max \end{array}}$$

שאלה מס' 2. מצאו את הגבולות הבאים:

2א) (6 נק')

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$$

$$\sqrt{n^2-3n+2}-n = n\left(\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}-1\right) =$$

$$= n\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\right) = -\frac{3}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

2ב) (7 נק')

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$$

$$A(x) = \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+a}{x-a}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot 2a}{x^2-a^2} = 2a$$

<u>תשובה:</u>

$$A(x)\xrightarrow[x\to\infty]{} e^{2a}$$

(ג2 (7 נק')

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}}_{A(x)}$$

$$A(x) = e^{\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 2x}}$$

$$\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 2x} = \frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)}{\left(2x+O(x^3)\right)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{x^2}{2}+O(x^4)}{4x^2+O(x^4)} = \frac{-\frac{1}{2}+O(x^2)}{4+O(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{8}$$

$$A(x) \xrightarrow[x\to 0]{} e^{-1/8}$$

שאלה מס' 3. חשבו את האינטגרל הבא $I=\int_0^{\pi/4} x\tan^2 x\,dx$

רמז: השתמשו בהצבה $t=\tan x$

$$x = \operatorname{arctg} t$$
$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$
$$0 \le t \le 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, tg^2 x\, dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} t \cdot \frac{t^2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= \int_0^1 \operatorname{arctg} t \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \int_0^1 \operatorname{arctg} t\,dt - \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\,dt$$

1) $\int_0^1 \operatorname{arctg} t\,dt = t\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 =$

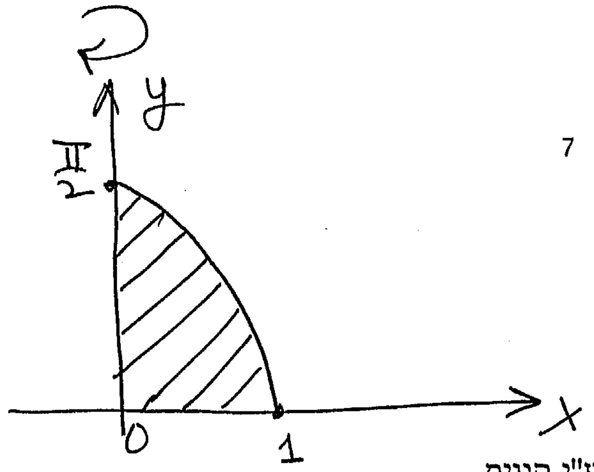
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

2) $\int_0^1 \operatorname{arctg} t \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \operatorname{arctg} t\, d(\operatorname{arctg} t) = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} t)^2\Big|_0^1 =$

$$= \frac{\pi^2}{32}$$

תשובה:

$$\underline{\underline{I = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi^2}{32}}}$$



שאלה מס' 4.

4א) (10 נק') תחום במישור (x,y) חסום ע"י קווים

$$y=\arccos x,\quad x=0,\quad y=0 .$$

סרטטו את התחום ומצאו נפח של הגוף הנוצר ע"י סיבוב של תחום זה סביב ציר y.

$$V=2\pi\int_0^1 x\arccos x\,dx=\pi\int_0^1 \arccos x\,d(x^2)=$$

$$=\pi\left[x^2\arccos x\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\right]=\pi\left[0+\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$x=\sin t$

$0\le t\le\frac{\pi}{2}$

$dx=\cos t\,dt$

$\cos t=+\sqrt{1-x^2}$

$$\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2t\,\cancel{\cos t}\,dt}{\cancel{\cos t}}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

תשובה:

$$\underline{V=\frac{\pi^2}{4}}$$

4ב) (10 נק') נתונה פונקציה

$$. f(x)=\frac{e^{x^2/2}(\cos x+x^2+3)(2+x+\ln(1+3x))}{3x+x^5+2}$$

חשבו בקירוב ליניארי את ערך הפונקציה בנקודה $x = 0.05$.

$$e^{x^2/2}=1+O(x^2)$$

$$\cos x+x^2+3=4+O(x^2)$$

$$2+x+\ln(1+3x)=2+x+3x+O(x^2)=2+4x+O(x^2)$$

$$\frac{1}{3x+x^5+2}=\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3x+x^5+2}\right)'\Big|_{x=0}}_{\frac{-(3+5x^4)}{(3x+x^5+2)^2}\Big|_{x=0}=-\frac{3}{4}}\cdot x+O(x^2)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+O(x^2).$$

$$f(x)=[1+O(x^2)][4+O(x^2)][2+4x+O(x^2)][\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}x+O(x^2)]$$

$$=4+8x-8\cdot\frac{3}{4}x+O(x^2)=\underline{4+2x+O(x^2)}$$

$$f(0.05)\approx f(0)+f'(0)\cdot 0.05=$$

$$=4+2\cdot 0.05=4.1$$

שאלה מס' 5. מצאו אורך של העקום הבא: $y=\ln\left(\frac{5}{2x}\right),\quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$

$$L=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad y=\ln\frac{5}{2}-\ln x$$

$$y'=-\frac{1}{x}$$

$$L=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{c} t=\sqrt{x^2+1} \\ 2\le t\le 3 \\ x=\sqrt{t^2-1} \\ dx=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}\end{array}\right\}=\int_2^3\frac{t^2\,dt}{t^2-1}=\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=1+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^3=1+\frac{1}{2}\left[\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right]=$$

$$=\underline{\underline{1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}}$$

שאלה מס' 6.

עבור איזה ערכים של a מתכנס האינטגרל הלא אמתי הבא $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^a}dx$?

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^a}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{\ln x}{x^a}dx$$

1. $a=1$ $\qquad \int_1^A \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 A \xrightarrow[A\to\infty]{} \infty$ <u>אינטגרל מתבדר</u>

2. $a\neq 1$

$$\int_1^A \frac{\ln x}{x^a}dx = \frac{1}{1-a}\left[\ln x \cdot x^{1-a}\Big|_1^A - \int_1^A x^{-a}dx\right] =$$

$$= \frac{A^{1-a}}{1-a}\ln A - \frac{1}{(1-a)^2}\left(A^{1-a}-1\right)$$

$a>1$) $\qquad A^{1-a}\xrightarrow[A\to\infty]{} 0$

$$\lim_{A\to\infty} A^{1-a}\ln A = \lim_{A\to\infty}\frac{\ln A}{A^{a-1}} \overset{Lop}{=}$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{\frac{1}{A}}{(a-1)A^{a-2}} = \frac{1}{a-1}\lim_{A\to\infty}A^{1-a} = 0$$

<u>אינטגרל מתכנס</u>

$a<1$) $\qquad \frac{1}{1-a}A^{1-a}\left(\ln A - \frac{1}{1-a}\right)\xrightarrow[A\to\infty]{}\infty$

<u>אינטגרל מתבדר</u>

<u>תשובה סופית:</u> האינטגרל מתכנס עבור $a>1$