אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 27.01.10
מרצה: ד"ר ל. פריגוזין
מבחן ב: **חדו"א 1 לביוטכנולוגיה**
מס' הקורס 0201.1.9561
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות אחד (2 עמודים), מחשב כיס עם צג קטן.

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות
בדפים המיועדים לכך בלבד
לטיוטה השתמשו במחברת טיוטה
לכל השאלות משכל שווה (20 נקודות)

בהצלחה!

שאלה מס' 1. האים אפשר להגדיר ערך של פונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2(x)}$ בנקודה $x=0$
כך שהפונקציה תהיה רציפה בנקודה זו? אם כן, חשבו גם $f'(0)$ (אם הנגזרת קיימת).

$$f(x)=\frac{\sin^2x-x^2}{x^2\sin^2x}=\frac{\left[x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\right]^2-x^2}{x^2\left[x+O(x^3)\right]^2}=$$

$$=\frac{x^2-2\frac{x^4}{6}+O(x^6)-x^2}{x^4+O(x^6)}\xrightarrow[x\to 0]{}-\frac{1}{3}$$

אם נגדיר $f(0)=-\frac{1}{3}$ פונקציה f תהיה רציפה
בנק' 0. נחשב את נגזרת

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(-\frac{1}{3})}{x}$$

$$\frac{f(x)+\frac{1}{3}}{x}=\frac{\sin^2x-x^2+\frac{1}{3}x^2\sin^2x}{x^3\sin^2x}=$$

$$=\frac{x^2-\frac{x^4}{3}+O(x^6)-x^2+\frac{x^4}{3}}{x^5+O(x^7)}=\frac{O(x^6)}{x^5+O(x^7)}\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

אזי קיימת $f'(0)=0$.

שאלה מס' 2. מצאו את הגבולות הבאים – אם קיימים:

א) (10 נק') $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x(x-1)}=-\frac{1+x+x^2-(1-x+x^2)}{x(1-x)\left[\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right]}=$$

$$=-\frac{2}{(1-x)\left[\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right]}\xrightarrow[x\to 0]{}-1$$

ב) (10 נק') $\lim\limits_{t\to\infty} t(a^{1/t}-1)$ $(a>0)$.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{t}}-1}{\frac{1}{t}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{t}}\ln a\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}a^{\frac{1}{t}}\ln a=\ln a$$

שאלה מס' 3.

א) (10 נק') מצאו קו משיק לגרף של פונקציה $f(x)=\int_x^{x^2-2} e^{t^2}\,dt$ בנקודה $(2,f(2))$.

קו משיק: $y=f(2)+f'(2)(x-2)$

$f(2)=\int_2^2 e^{t^2}dt=0$

$f'(x)=e^{(x^2-2)^2}\cdot 2x-e^{x^2}$

$f'(2)=e^4(4-1)=3e^4$

$y=3e^4(x-2)$

ב) (10 נק') חשבו את האינטגרל הלא אמתי הבא: $I=\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx$

$I=\lim\limits_{A\to\infty}\int_1^A \frac{\ln x}{x^3}dx$

$I_A=\int_1^A \frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\int_1^A \ln x\, d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{x^2}\Big|_1^A-\int_1^A\frac{dx}{x^3}\right]=$

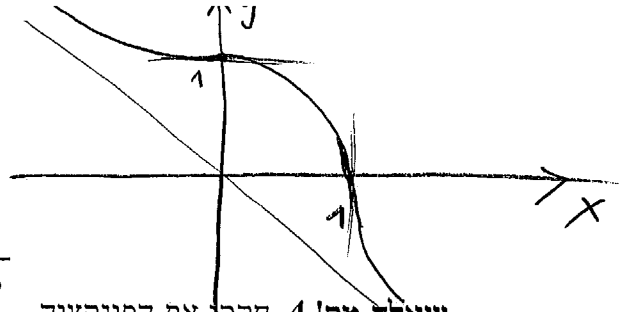
$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln A}{A^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2}-1\right)\right]$

$\lim\limits_{A\to\infty} I_A=-\frac{1}{2}\lim\limits_{A\to\infty}\frac{\ln A+\frac{1}{2}}{A^2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{A\to\infty}\frac{\ln A}{A^2}=\lim\limits_{A\to\infty}\frac{1}{2A^2}=0$

5

תשובה: $I=\frac{1}{4}$



שאלה מס' 4. חקרו את הפונקציה $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ וסרטטו את הגרף שלה.

צריך למצוא: תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול.

תחום הגדרה: $x\in R$. פונקציה רציפה בכל נקודה.
אין אסימפטוטות אנכיות. אסימפטוטות משופעות:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[-x\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[-x\left(1-1+\frac{1}{3x^3}+O(x^{-6})\right)\right]=0$$

$\boxed{y=-x}$ – אסימפטוטה כאשר $x\to\infty$ וגם כאשר $x\to-\infty$

נקודות חיתוך עם צירים: $(0,1)$, $(1,0)$

תחומי עליה וירידה:

$$y'=-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

הפונקציה לא גזירה בנקודה $x=1$. בנקודות אחרות $y'\le 0$. נקודות חשודות לקיצון: $x=0, x=1$. אך בגלל ש-y' לא משנה סימן אין נקודות קיצון. הפונקציה מונוטונית יורדת.

תחומי קמירות וקעירות:

$$y''=-\frac{2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$$

$y''=0$ כאשר $x=0$.
$y''<0$ בתחום $0<x<1$ – קעירות
$y''>0$ כאשר $x<0$ או $x>1$ – קמירות
$x=0$ ו $x=1$ – נקודות פיתול

שאלה מס' 5.

א) (10 נק') מצאו אורך של עקום (נתון בקואורדינאטות פולריות):
$r = 2\cos^3(\varphi/3), \quad 0 \le \varphi \le 3\pi/2$.

$$L = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi \qquad r' = -2\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}$$

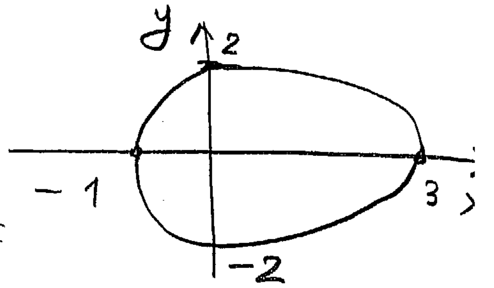
$$r^2 + (r')^2 = 4\cos^4\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3} + 4\cos^6\frac{\varphi}{3} = 4\cos^4\frac{\varphi}{3}$$

$$L = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} 2\cos^2\frac{\varphi}{3}\, d\varphi = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(1 + \cos\frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\pi}}$$

ב) (10 נק') סרטטו את עקום $r = 2 + \cos\varphi$ (נתון בקואורדינאטות פולריות) וחשבו שטח התחום החסום ע"י העקום.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2 + \cos\varphi)^2\, d\varphi =$$



$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 + 4\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4.5 + 4\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 4.5\pi$$

שאלה מס' 6. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א) (10 נק') $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x(1+\tan^3 x)}dx$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{1+\tan^3 x} d(\tan x) = \left\{ \begin{matrix} t = \tan x \\ 0 \le t \le 1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt^3}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln|1+t^3|\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2$$

ב) (10 נק') $I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

הצבה:

$$\left\{\begin{array}{ll} t = tg\frac{x}{2} & \\ x = 2arctg\,t & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{(1-t^2)}{1+t^2} + 5} = \int \frac{2dt}{2t^2+8t+8} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2}\Bigg|_{t=tg\frac{x}{2}} + c = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2} + C$$