אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 23.01.14
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: **<u>חדו"א 1 לביוטכנולוגיה</u>**
מס' הקורס 0201.1.9561
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות

<u>חומר עזר</u>: דף נוסחאות אחד (2 עמודים). אסור להשתמש במחשבון.

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות
בדפים <u>המיועדים לכך בלבד</u>
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה)
לכל השאלות משכל שווה (20 נקודות)
נבדקות כל 6 השאלות. מתחשבים ב-5 התשובות הטובות ביותר.

בהצלחה!

שאלה מס' 1.

1א) (10 נק') הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)=-\infty$

$$a_n = n\sqrt{n}\left(1-\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right) =$$

$$= n\sqrt{n}\left(1-\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = 1+\frac{3}{2n}+O(n^{-2}) \implies$$

$$a_n = n\sqrt{n}\left(-\frac{3}{2n}+O(n^{-2})\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{n}+O(n^{-\frac{1}{2}})$$

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \qquad \text{אז}$$

1ב) (10 נק') מצאו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)-2\arcsin(x)}{x^3}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)-2\arcsin(x)}{x^3}\overset{\text{לופ.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$(1-\alpha)^{-1/2}=1+\frac{\alpha}{2}+O(\alpha^2)$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+2x^2)-2(1+\frac{x^2}{2})+O(x^4)}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+O(x^4)}{3x^2}=1$$

שאלה מס' 2.

2א) (10 נק') מצאו פולינום טיילור ממעלה שתיים, $T_2(x)$, בסביבת נק' $a=1$ של פונקציה

$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$f(1)=\int_1^1\frac{\sin t}{t}dt=0$$

$$f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x}{x} \qquad f'(1)=\sin 1$$

$$f''(x)=\left(\frac{2\sin x^2-\sin x}{x}\right)'=$$

$$=\frac{x(4\cos x^2\cdot x-\cos x)-(2\sin x^2-\sin x)}{x^2}\Rightarrow$$

$$f''(1)=4\cos 1-\cos 1-(2\sin 1-\sin 1)=$$

$$=3\cos 1-\sin 1$$

$$T_2(x)=0+\sin 1\cdot(x-1)+(3\cos 1-\sin 1)\frac{(x-1)^2}{2}$$

2ב) (10 נק') נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{\sin x}-\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

השתמשו בהגדרה של נגזרת כדי לבדוק האם קיימת $\frac{df}{dx}(0)$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1-x^2}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-x^3-\sin x}{x^2\sin x}=$$

$$=\frac{x-x^3-x+\frac{x^3}{3!}+O(x^5)}{x^2(x+O(x^3))}=\frac{-\frac{5}{6}x^3+O(x^5)}{x^3+O(x^5)}=$$

$$=\frac{-\frac{5}{6}+O(x^2)}{1+O(x^2)}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{5}{6}$$

שאלה מס' 3.

3א) (10 נק') מצאו את האינטגרל הבא $I=\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}dx$

$$t=\sqrt{x}$$
$$x=t^2$$
$$dx=2t\,dt$$

$$\Rightarrow\quad I=\int\frac{t+1}{t-1}2t\,dt=$$

$$=2\int\frac{t^2+t}{t-1}dt=$$

$$\begin{array}{r|l} t^2+t & t-1 \\ \hline t^2-t & t+2 \\ \hline 2t & \\ 2t-2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$=2\int\left(t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt=$$

$$=t^2+4t+4\ln|t-1|+C=$$

$$=\underline{x+4\sqrt{x}+4\ln|\sqrt{x}-1|+C}$$

3ב (10 נק') חשבו אורך העקום הבא: $\{\, y = \ln(3\cos x), \quad 0 \le x \le \pi/3 \,\}$

$$y' = \frac{1}{3\cos x}(-3\sin x) = -\,tg\,x$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+tg^2 x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \left\{ \begin{array}{ll} t = tg\,\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} & 0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right\}$$

$\cos x > 0$
בקטע

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{1-t^2}\,dt =$$

$$\left\{ \frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t-1} \right\}$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| \Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}\right| = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

שאלה מס' 4. חקרו את הפונקציה $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-2x$ וסרטטו את הגרף שלה. צריך לחקור: תחום הגדרה, רציפות ודיפרנציאביליות, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, התנהגות כאשר $x\to\pm\infty$, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות.

1) $f(x)$ מוגדרת בכל נק' x וגם רציפה.

נגזרת $f'(x)$ מוגדרת עבור כל $x\neq 0$: $f'(x)=2x^{-1/3}-2$

2) $f'(x)>0$ עבור $0<x<1$, זה תחום עליה.

תחומי ירידה: $\{x<0\}\cup\{x>1\}$.

$- \quad 0 \quad + \quad 1$

מינימום מקומי: $(0,0)$. מקסימום מקומי: $(1,1)$.

3) אסימפטוטות. ① אין אסימפטוטות אנכיות.

②
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$$

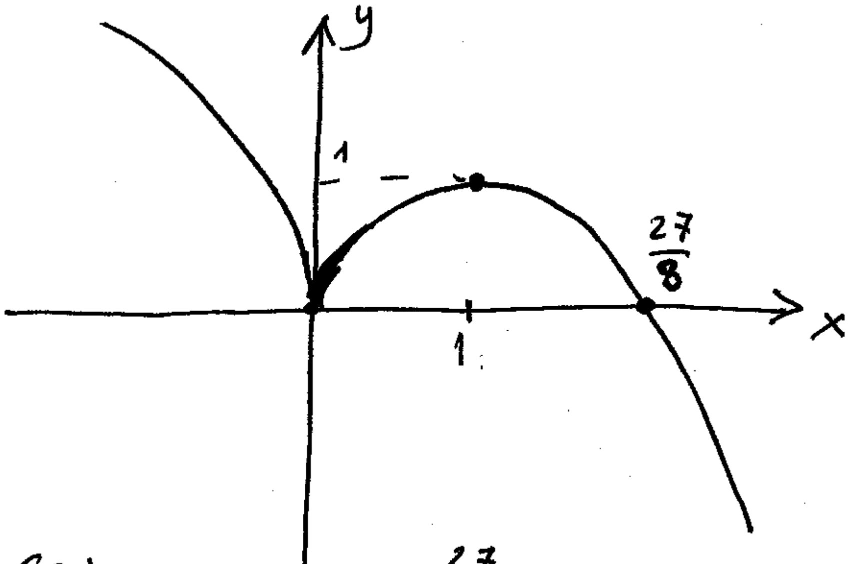
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)+2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}3\sqrt[3]{x^2}=\infty$$
אין אסימפטוטות

4) התנהגות כאשר $x\to\pm\infty$: $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}\mp\infty$

5) $f''=-\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}$, $f''=-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^{-4}}\leq 0 \Leftarrow f(x)$ קעירה

בתחומים $(-\infty,0)$ ו- $(0,\infty)$

6) גרף:



$f(x)=0\rightarrow \quad x=\frac{27}{4}$

שאלה מס' 5.

תחום D נתון בקואורדינאטות קוטביות (פולריות):

$$D=\left\{(\varphi,r):\ \ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3},\quad 0\le r\le\frac{2}{\sin^2\varphi}\right\}$$

מצאו שטח של תחום D.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4}{\sin^4\varphi}\,d\varphi=\left\{\begin{array}{l} t=tg\,\varphi\\ \varphi=arctg\,t\\ d\varphi=\frac{dt}{1+t^2}\\ \sin^2\varphi=\frac{t^2}{1+t^2}\end{array}\right\}=$$

$$=2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{(1+t^2)^2}{t^4}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1+t^2}{t^4}\,dt=2\left(-\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{88}{27}\sqrt{3}$$

שאלה מס' 6.

האם האינטגרל הלא אמיתי הבא $\int_0^1 \ln^2 x\,dx$ מתכנס ?

הסבירו כל שלבי הפתרון.

$$I=\int_0^1 \ln^2 x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln^2 x\,dx$$

$$\int_\varepsilon^1 \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x\Big|_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 2\ln x\,dx=$$

$$=-\varepsilon\ln^2\varepsilon-2x\ln x\Big|_\varepsilon^1+2\int_\varepsilon^1 1\,dx=$$

$$=-\varepsilon\ln^2\varepsilon+2\varepsilon\ln\varepsilon+2(1-\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln^2\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln^2\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}\overset{\text{לופ.}}{=}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\ln\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=$$

$$=-2\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}\overset{\text{לופ.}}{=}-2\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=+2\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon=0$$

לכן $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon=0$. אז האינטגרל מתכנס:

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln^2 x\,dx=2$$