אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה 28.01.15
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: **<u>חדו"א 1 לביוטכנולוגיה</u>**
מס' הקורס 0201.1.9561
מועד א סמ' א
משך הבחינה- 3 שעות

<u>חומר עזר</u>: דף נוסחאות אחד (2 עמודים). מחשב כיס עם צג קטן.

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות
בדפים <u>המיועדים לכך בלבד</u>
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה)
לכל השאלות משקל שווה (20 נקודות)
נבדקות כל 6 השאלות. מתחשבים ב-5 התשובות הטובות ביותר.

בהצלחה!

שאלה מס' 1.

א1) (10 נק') חשבו את הגבול הבא $A = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$

$$A = \lim_{X\to+\infty}\left(\sqrt{(-x)^2-x}-x\right) = \lim_{X\to\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\right) =$$

$$= \lim_{X\to\infty} x\left(1-\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right) = -\frac{1}{2}$$

1ב) (10 נק') חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \ln(\sin t)\,dt}{\cos^2 x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \overset{\text{לופיטל}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\overset{\to 0}{\ln(\sin x)}}{\underset{\to 0}{-2\cos x \sin x}} \overset{\text{לופיטל}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{\overset{\to 0}{\cos x}}{\underset{\to 1}{\sin x}}}{+2\underset{\to 1}{\sin^2 x} - 2\underset{\to 0}{\cos^2 x}} = \frac{0}{2\cdot 1 - 2\cdot 0} = 0$$

שאלה מס' 2. השתמשו בנוסחת טיילור כדי לחשב $\sqrt[3]{30}$ עד כדי שגיאה לא גדולה מ- 10^{-3}.
<u>הסבירו איך הערכתם את השגיאה.</u>

$f(x) = x^{1/3}, \quad a = 27, \quad x = 30 \qquad T_n(x)$

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

$f(a) = 3, \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

$f'' = -\frac{2}{9}x^{-5/3} \Rightarrow f''(a) = -\frac{2}{3^7}, \quad f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$

$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$

אפשר לבדוק כי $|R_1(x)| > 10^{-3}$. <u>ניקח $n=2$:</u>

$|R_2(x)| = \left|\frac{f'''(c)}{6!}(x-a)^3\right| = \frac{10 \cdot 3^3}{6 \cdot 27 \cdot c^{8/3}} < \frac{10 \cdot 3^3}{6 \cdot 27 \cdot a^{8/3}} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$

כי <u>$a < c$</u>

$|R_2(x)| < 10^{-3}$

$\sqrt[3]{30} \approx T_2(30) = 3 + \frac{1}{27} \cdot 3 - \frac{2}{3^7} \cdot 3^2 = \underline{\underline{3.1070}}$

שאלה מס' 3.

3א) (10 נק') מצאו את האינטגרל הבא $$I=\int\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$$

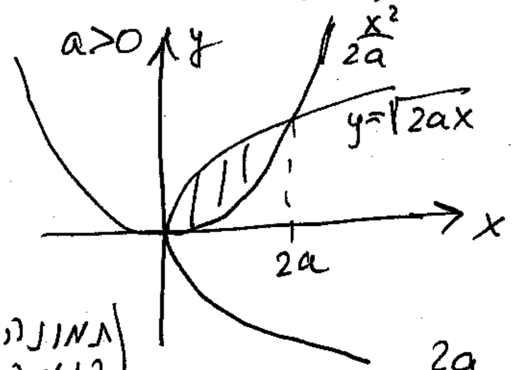
$$\left\{t=\sqrt[6]{x}\ ,\quad x=t^6,\quad dx=6t^5dt\right\}$$

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=6\left[\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\right]=6(t-\operatorname{arctg}t)+C=$$

$$=6\left(\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C$$

3ב) **(10 נק')** חשבו שטח של תחום כלוא בין הפרבולות $y^2 = 2ax$ ו- $x^2 = 2ay$.



$x^2 = 2ay \Rightarrow y = \frac{x^2}{2a}$

$y^2 = 2ax \Rightarrow y = +\sqrt{2ax}$

$\frac{x^2}{2a} = \sqrt{2ax} \Rightarrow x = 2a$

(תמונה
דומה עבור
$a<0$)

$$S = \int_0^{2a} \left(\sqrt{2ax} - \frac{x^2}{2a} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \sqrt{2a}\, x^{3/2} - \frac{x^3}{6a} \right) \Bigg|_0^{2a} = \underline{\underline{\frac{4}{3} a^2}}$$

שאלה מס' 4. חקרו את הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$ וסרטטו את הגרף שלה. <u>צריך לחקור</u>: תחומי הגדרה, רציפות ודיפרנציאביליות, אסימפטוטות והתנהגות כאשר $x\to\pm\infty$, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות.

* $f(x)$ מוגדרת לכל x ממשי ומכיוון ש- $f(x)$ אלמנטרית היא רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.
* אסימפטוטות אנכיות אין
* אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}(1-x)}{x}=\lim\frac{1-x}{\sqrt[3]{x}}\overset{+\infty}{=}\infty$$

לכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$

בדומה, אין אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$

* נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0),(1,0)$
* נחשב את $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(x^{2/3}-x^{5/3}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{5}{3}x^{2/3}$$

נשים לב כי $f'(x)$ לא מוגדרת ב- 0, נחשב $f'(0)$ לפי ההגדרה (אם קיימת)

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}(1-\Delta x)}{\Delta x}=$$

אם קיימת

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1-\Delta x)}{\sqrt[3]{\Delta x}}=\infty$$

$\Leftarrow$ $f(x)$ לא גזירה ב- 0.

* נק' קיצון $f'(x)=0 \Leftarrow x=\frac{2}{5}$

או $x=0$ ($f'(x)$ לא מוגדרת בה).

* מיון הנקודות: $x=\frac{2}{5}$ נק' מקסימום, $x=0$ נק' מינימום.

	0		2/5	
x	$x<0$	$x>0$	$x<\frac{2}{5}$	$x>\frac{2}{5}$
f'	↘	↗	↗	↘

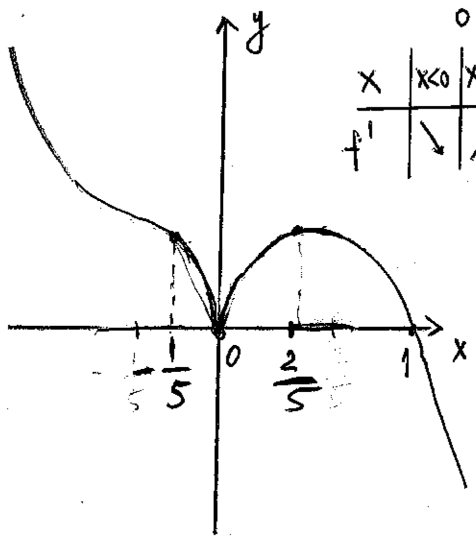
* תחומי קמירות/קעירות

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-4/3}-\frac{10}{9}x^{-1/3}=0$$

אזי $x=-\frac{1}{5}$

$f(x)$ קמורה ב- $x<-\frac{1}{5}$

וקעורה ב- $-\frac{1}{5}<x<0$ ו- $x>0$.



שאלה מס' 5.

5א) (10 נק') פונקציה $y = f(x)$ נתונה בצורה פרמטרית:

$$\begin{cases} x = 2t + t^4, \\ y = 3t + t^3 + 1 \end{cases}$$

מצאו משוואה של קו משיק לגרף של f בנקודה $(x(0), y(0))$.

משוואת הישר המשיק נתונה ע"י

$x(0)=0$, $y(0)=1$, $y-y(0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}(x-x(0))$

נשתמש בכלל השרשרת

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$

$\Leftarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+3}{4t^3+2}$

$\Leftarrow$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3}{2}$ ולכן

$y-1 = \frac{3}{2}(x-0)$

כ"ז $y = \frac{3}{2}x+1$ המשוואה המבוקשת

5ב) (10 נק') חשבו שטח של תחום חסום ע"י עקום $r = \sin\varphi - 0.5$ (נתון בקואורדינטות קוטביות).

נפתור אי שיוויון $0 \le r = \sin\varphi - 0.5$ אזי

$\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}$ ולכן השטח המבוקש נתון ע"י

$$S = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(\sin^2\varphi - \sin\varphi + 0.25)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin\varphi\,d\varphi + \frac{1}{8}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}d\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

שאלה מס' 6. הגוף מיוצר ע"י סיבוב של תחום

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\le y\le \frac{1}{\sqrt{x^3+1}},\quad 0\le x<\infty\right\}$$

סביב ציר ה-x. מצאו נפח של הגוף.

$$V=\pi\int_0^\infty f^2(x)\,dx=\pi\int_0^\infty\frac{dx}{x^3+1}=\pi\int_0^\infty\frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dots$$

נציב

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

לכן האינטגרל האחרון הופך ל-

$$\dots=\frac{\pi}{3}\int_0^\infty\frac{dx}{x+1}+\pi\int_0^\infty\frac{-\frac{1}{3}x\,dx}{x^2-x+1}+\pi\int_0^\infty\frac{\frac{2}{3}dx}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^\infty\frac{dx}{x+1}-\frac{\pi}{3}\int\frac{x\,dx}{x^2-x+1}+\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty\frac{dx}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\ln|x+1|\Big|_0^\infty-\frac{\pi}{6}\int\frac{(2x-1+1)dx}{x^2-x+1}+\frac{2\pi}{3}\int\frac{dx}{3/4+(x-1/2)^2}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\ln|x+1|\Big|_0^\infty-\frac{\pi}{6}\int_0^\infty\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}\underbrace{-\frac{\pi}{6}\int_0^\infty\frac{dx}{3/4+(x-1/2)^2}+\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty\frac{dx}{3/4+(x-1/2)^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\ln|x+1|\Big|_0^\infty-\frac{\pi}{6}\int_0^\infty\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}-\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty\frac{dx}{1+\left(\frac{2}{\sqrt3}x-\frac{1}{\sqrt3}\right)^2}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\ln|x+1|\Big|_0^\infty-\frac{\pi}{6}\ln|x^2-x+1|\Big|_0^\infty+\frac{\pi}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt3}x-\frac{1}{\sqrt3}\right)\Big|_0^\infty=$$

$$=\underbrace{\frac{\pi}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{|x^2-x+1|}}\Big|_0^\infty}_{=0}+\left[\frac{\pi}{\sqrt3}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt3}\,\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{\sqrt3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi^2}{3\sqrt3}$$