

פונקציות של מספר משתנים

I נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 y + \frac{y^2}{x}$. חשב :

a) $f(1, -1)$ b) $f\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ c) $f(y, x)$ d) $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ e) $f(-x, -y)$

II מצא את התחום ההגדרה של פונקציות :

$$\begin{array}{ll} 1. v(x, y) = x + \sqrt{y} & 10. u(x, y, z) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2} \\ 2. f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1} & 11. f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} \\ 3. g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} & 12. g(x, y) = \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + x^2 y \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \\ 4. h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} & 13. h(x, y) = \arcsin \frac{y}{x} \\ 5. k(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)} & 14. v(x, y) = \arccos \frac{x}{x + y} \\ 6. v(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - x) / (2x - x^2 - y^2)} & 15. g(x, y) = \arcsin(x / y^2) + \arcsin(1 - y) \\ 7. f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2} & 16. f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} \\ 8. g(x, y) = \ln(-x - y) & 17. v(x, y, z) = \ln(xyz) \\ 9. v(x, y) = \ln(-x + y) & 18. g(x, y, z) = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2) \end{array}$$

III בנה את קווי הרמה של הפונקציות (או קווי הגובה) :

$$\begin{array}{lll} 1. g(x, y) = x + y & 4. h(x, y) = (x + y)^2 & 7. v(x, y) = \sqrt{x y} \\ 2. f(x, y) = x^2 + y^2 & 5. g(x, y) = \frac{y}{x} & 8. h(x, y) = e^{2x/(x^2 + y^2)} \\ 3. v(x, y) = x^2 - y^2 & 6. f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2} & 9. f(x, y) = 1 - |x| - |y| \end{array}$$

IV בדוק את רציפות הפונקציות בנקודות (0,0) ו(1,2).

$$\begin{array}{l} \text{א) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{ב) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-2)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-2)}, & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & (x, y) = (1, 2) \end{cases} \\ \text{ג) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-2)}, & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & (x, y) = (1, 2) \end{cases} \end{array}$$

2. האם ניתן להגדיר את הפונקציות הבאות בנקודה (0,0) ברציפות :

$$(2) \quad f(x, y) = x \ln(x^2 + 3y^2) \quad (1) \quad f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

$$(4) \quad f(x, y) = \frac{x}{y} e^{-y^2} \quad (3) \quad f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$$

נגזרות חלקיות

חשב את הנגזרת מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

1. $u(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 y^3 + 5$
2. $f(x, y) = \frac{x}{y^2} + e^{2xy}$
3. $u(x, y) = x \sin(2x + 3y)$
4. $v(x, y) = x^y$
5. $u(x, y) = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$
6. $f(x, y) = \ln(x + y^2) + 5^{xy^2}$
7. $f(x, y) = (1 + xy)^y$
8. $v(x, y) = \ln(x + \ln y)$
9. $u(x, y, z) = x^{y/z}$
10. $g(x, y) = e^{-x/y} + 3$
11. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$
12. $v(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
13. $h(x, y) = (1 + \log_y x)^3$
14. $g(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right), \frac{\partial g}{\partial x}(1, 2) = ? \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1, 2) = ?$

VI נגזרות חלקיות של פונקציה מורכבת, כלל השרשרת

1. נתון $U(t) = u(f(t), g(t), h(t))$, $h(t) = t^3$, $g(t) = e^{-t}$, $f(t) = \sin 4t$, $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz$.
חשב $U'(t)$.
2. נתון $V(t) = v(f(t), g(t))$, $g(t) = \ln(t^2 + \ln 5t)$, $f(t) = te^{2t}$, $v(x, y) = x/y$.
חשב $V'(t)$.
3. נתון $Z(x, y) = z(f(x, y), g(x, y))$, $g(x, y) = y/x$, $f(x, y) = x/y$, $z(u, v) = u^2 \ln v$.
חשב $\partial Z / \partial y$, $\partial Z / \partial x$.
4. $U(x) = u(x, v(x))$, $v(x) = x^3$, $u(x, y) = \ln(e^x + e^y)$.
חשב dU/dx .
5. $Z(t) = z(t, f(t), v(t))$, $v(t) = \sqrt{t}$, $f(t) = 1/t$, $z(t, x, y) = \tan(3t + 2x^2 - y)$.
חשב dZ/dt , $\partial z / \partial t$.
6. $Z(u, v) = z(f(u, v), g(u, v))$, $g(u, v) = u \cos v$, $f(u, v) = u \sin v$, $z(x, y) = \arctan(x/y)$.
חשב $\partial Z / \partial u$, $\partial Z / \partial v$.
7. $U(t) = u(f(t), g(t))$, $g(t) = t \sin t$, $f(t) = t \cos t$, $u(x, y) = e^{xy^2}$.
חשב $U'(\pi/2)$.
8. הוכח כי אם $z(x, y) = f(x^2 - y^2)$ גזירה אזי מתקיים השוויון $y(\partial z / \partial x) + x(\partial z / \partial y) = 0$.
9. הוכח כי אם $z(x, y) = e^y f(ye^{x^2/(2y^2)})$ גזירה אזי מתקיים השוויון $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$.
10. הוכח כי אם $u(x, y, z) = f(x^2 z - yz)$ גזירה אזי מתקיים השוויון $x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
11. הוכח כי אם $u(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$ גזירה אזי מתקיים השוויון $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

תשובות

$$\text{I. a) } 0 \quad \text{b) } \frac{110}{9} \quad \text{c) } \frac{xy^3 + x^2}{y} \quad \text{d) } \frac{x^3 + y}{x^2 y^2} \quad \text{e) } -x^2 y - \frac{y^2}{x}$$

$$\text{II. 1. } y \geq 0 \quad 2. |x| \leq 1, |y| \geq 1 \quad 3. x^2 + y^2 \leq 1 \quad 4. x^2 + y^2 > 1 \quad 5. 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

$$6. x \leq x^2 + y^2 < 2x \quad 7. |x^2 + y| \leq 1 \quad 8. x + y < 0 \quad 9. y > x \quad 10. x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

$$11. |x| \leq y^2, y \neq 0 \quad 12. x^2 + y^2 = 4 \quad 13. |y| \leq |x|, x \neq 0$$

$$14. \{y \geq 0, y \geq -2x, x^2 + y^2 \neq 0\} \cup \{y \leq 0, y \leq -2x, x^2 + y^2 \neq 0\}$$

$$15. y^2 = -x, y^2 = x \quad \text{המשולש העקום החסום ע"י הפרבולות} \\ \text{והישר } y=2 \text{ (לא כולל את הראשית)}$$

$$16. 2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \pi(2k+1), k=0,1,2,\dots$$

$$17. \{x > 0, y > 0, z > 0\} \cup \{x > 0, y < 0, z < 0\} \cup \{x < 0, y > 0, z < 0\} \cup \{x < 0, y < 0, z > 0\}$$

$$18. \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 < -1\}$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \quad \text{החלק הפנימי של ההיפרבולויד דו-יריעתי}$$

$$\text{III. 1. } x + y = c \quad \text{ישרים מקבילים} \quad 2. c \geq 0, x^2 + y^2 = c \quad \text{מעגלים}$$

$$3. x^2 - y^2 = c \quad y = \pm x \quad \text{משפחת היפרבולות שוות שוקיים בעלות אסימפטוטות משותפות:} \\ \text{וזוג הישרים } y = \pm x \text{ עצמו}$$

$$4. c \geq 0, x + y = \sqrt{c} \quad \text{ישרים מקבילים} \quad 5. \quad \text{אלומת ישרים } y = cx \text{ ללא הראשית}$$

$$6. \frac{x^2}{1/c} + \frac{y^2}{1/(2c)} = 1, c > 0 \quad \text{משפחת אליפסות}$$

$$7. \{c=0: y=0 \text{ or } x=0\} \& \quad \{c \neq 0: xy = c^2\} \quad \text{משפחת היפרבולות}$$

$$8. x^2 + y^2 = c_1 x \quad \text{אלומת מעגלים העוברים דרך הראשית (ללא הראשית)}$$

$$9. |x| + |y| = c_1 \quad (c_1 \geq 1) \quad \text{ריבועים}$$

$$\text{משפחת מישורים מקבילים}$$

IV

1.

$$\text{א. } f \text{ אי רציפה ב- } (0,0) : \text{ אין גבול כאשר } (x,y) \rightarrow (0,0).$$

$$\text{פתרון: נסמן } t = x^3 + y \text{ אז } y = t - x^3 \text{ ו- } f = x^2 - x^5/t \text{ . ניקח למשל } t = x^6.$$

$$\text{ב. } f \text{ רציפה.}$$

$$\text{רמז עבור נק' } (1,2) : \text{ יהיו } u = x - 1, \quad v = y - 2 \text{ . השתמשו באי-שוויון } |uv| \leq (u^2 + v^2)/2 \text{ וקחו}$$

$$\text{בחשבון ש- } \lim_{v \rightarrow 0} \sin v / v = 1.$$

$$\text{ג. } f \text{ אי רציפה ב- } (1,2) : \text{ אין גבול כאשר } (x,y) \rightarrow (1,2).$$

2.

$$(1) \text{ לא.}$$

$$(2) \text{ כן. פתרון: נסמן } r = \sqrt{x^2 + 3y^2} \text{ ונקבל } r \rightarrow 0 \text{ ו- } |\ln r| \rightarrow \infty \text{ . כאשר } |f| = \sqrt{r^2 - 3y^2} |\ln r| \leq 2r |\ln r|$$

$$\text{גם } r \rightarrow 0 \text{ .}$$

$$(3) \text{ כן: } |f| \leq |y| \rightarrow 0 \text{ כאשר } y \rightarrow 0.$$

$$(4) \text{ לא.}$$

V.

$$1. \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^3, \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 12x^2y^2 \quad 2. \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + 2ye^{2xy}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x}{y^3} + 2xe^{2xy}$$

$$3. \frac{\partial u}{\partial x} = \sin(2x + 3y) + 2x \cos(2x + 3y), \frac{\partial u}{\partial y} = 3x \cos(2x + 3y)$$

$$4. \frac{\partial v}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial v}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$5. \frac{\partial u}{\partial x} = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)$$

$$6. \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2} + 5^{xy^2} y^2 \ln 5, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2} + 5^{xy^2} 2xy \ln 5$$

$$7. \frac{\partial f}{\partial x} = y^2(1 + xy)^{y-1}, \ln f = y \ln(1 + xy) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \right) (1 + xy)^y$$

$$8. \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x + \ln y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{(x + \ln y)y}$$

$$10. \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{e^{-x/y}}{y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{xe^{-x/y}}{y^2}$$

$$11. \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$12. \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)}$$

$$13. \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{3(1 + \log_y x)^2}{x \ln y}, \quad \log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{3(1 + \log_y x)^2 \ln x}{y \ln^2 y}$$

VI

$$1. dU / dt = 4(2x + z) \cos 4t - 2ye^{-t} + 3xt^2 = 4(2 \sin 4t + t^3) \cos 4t - 2e^{-2t} + 3t^2 \sin 4t$$

$$2. \frac{dV}{dt} = \frac{e^{2t}(1 + 2t)}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{2t + 1/t}{t^2 + \ln 5t} = \dots$$

$$3. \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{2u \ln v}{y} - \frac{u^2}{v} \frac{y}{x^2} = \dots, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{2xu \ln v}{y^2} + \frac{u^2}{v} \frac{1}{x} = \dots$$

$$4. \frac{dU}{dx} = \frac{e^x + 3e^y x^2}{e^x + e^y} = \dots$$

$$5. \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{3}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} = \dots, \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{3 - 4x/t^2 - 0.5/\sqrt{t}}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} = \dots$$

$$6. \partial Z / \partial u = (y \sin v - x \cos v) / (x^2 + y^2) = \dots$$

$$7. \frac{dU}{dt}(\pi/2) = -\pi^3/8$$